Toppersnotes®
Unleash the topper in you

DELHI POLICE
HEAD CONSTABLE
MINISTERIAL

STAFF SELECTION COMMISSION

भाग – 2

गणित

SIERRA INNOVATIONS

DELHI HEAD CONSTABLE

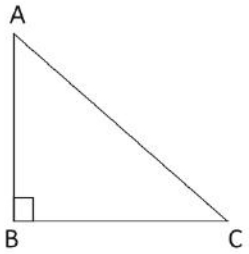
CONTENTS

गणित		
1.	संख्या पद्धति	1
2.	सरलीकरण	17
3.	घातांक एवं करणी	30
4.	प्रतिशतता	47
5.	बट्टा	60
6.	लाभ – हानि	70
7.	साझेदारी	87
8.	औसत	96
9.	साधारण ब्याज	107
10.	चक्रवृद्धि ब्याज	119
11.	अनुपात एवं समानुपात	132
12.	मिश्रण एवं एलीगेशन	150
13.	समय और कार्य	159
14.	चाल, समय और दूरी	169
15.	बीजगणित	181
16.	ज्यामिति	197
17.	क्षेत्रमिति	232
18.	त्रिकोणमिती	270
19.	ऊँचाई व दूरी	288
20.	डाटा इंटरप्रिटेशन	301

त्रिकोणमिती (Trigonometry)

समकोण त्रिभुज

1. ऐसा त्रिभुज जिसमें एक कोण 90° का हो, वह समकोण त्रिभुज कहलाता है ।
2. समकोण त्रिभुज की सम्मुख भुजा को कर्ण कहते हैं ।



- ABC एक समकोण त्रिभुज है जहाँ B पर समकोण है । AC कर्ण है ।
- $\angle C$ के लिए BC आधार व AB लम्ब होगा ।
- $\angle A$ के लिए AB आधार व BC लम्ब होगा ।

पाइथागोरस प्रमेय,

$(\text{कर्ण})^2 = (\text{आधार})^2 + (\text{लम्ब})^2$

$(AC)^2 = (AB^2) + (BC)^2$

न्यूनकोणो के त्रिकोणमितीय अनुपात

3. किसी समकोण त्रिभुज में किन्ही दो भुजाओ के अनुपात को त्रिकोणमितीय अनुपात कहते है ।
4. θ के लिए यहाँ लम्ब AB व आधार BC होगा ।

$$\sin\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{AB}{AC} \qquad \cos\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{AB}{BC} \qquad \cot\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\sec\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \frac{AC}{BC} \qquad \operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}} = \frac{AC}{AB}$$

Trick:-

sin	cos	tan
↑	↑	↑
L	A	L
K	K	A
↓	↓	↓
cosec	sec	cot

L = लम्ब
A = आधार
K = कर्ण

अनुपातों के मध्य संबंध

(i) $\sin\theta.\operatorname{cosec}\theta = 1 \Rightarrow \sin\theta = 1/\operatorname{cosec}\theta$

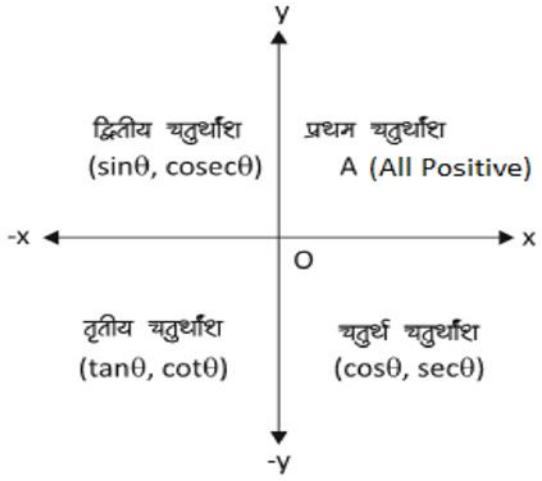
(ii) $\tan\theta.\cot\theta = 1 \Rightarrow \tan\theta = 1/\cot\theta$

(iii) $\cos\theta.\sec\theta = 1 \Rightarrow \cos\theta = 1/\sec\theta$

(iv) $\tan\theta = \sin\theta / \cos\theta$

(v) $\cot\theta = \cos\theta / \sin\theta$

अनुपातों के विभिन्न चतुर्थांशो में चिन्ह



Trick – ASTC (After school to College)

- I चतुर्थांश में सभी अनुपात धनात्मक
- II चतुर्थांश में sin, cosec ही धनात्मक
- III चतुर्थांश में tan, cot ही धनात्मक
- IV चतुर्थांश में cos, sec ही धनात्मक

$(90° - \theta)$ के त्रिकोणमितीय अनुपात	$(90° + \theta)$ के त्रिकोणमितीय अनुपात	$(180 + \theta)$ के त्रिकोणमितीय अनुपात
$\sin(90 - \theta) = \cos\theta$	$\sin(90 + \theta) = \cos\theta$	$\sin(180 + \theta) = -\sin\theta$
$\cos(90 - \theta) = \sin\theta$	$\cos(90 + \theta) = -\sin\theta$	$\cos(180 + \theta) = -\cos\theta$
$\tan(90 - \theta) = \cot\theta$	$\tan(90 + \theta) = -\cot\theta$	$\tan(180 + \theta) = \tan\theta$
$\cot(90 - \theta) = \tan\theta$	$\cot(90 + \theta) = -\tan\theta$	$\cot(180 + \theta) = \cot\theta$
$\sec(90 - \theta) = \operatorname{cosec}\theta$	$\sec(90 + \theta) = -\operatorname{cosec}\theta$	$\sec(180 + \theta) = -\sec\theta$
$\operatorname{cosec}(90 - \theta) = \sec\theta$	$\operatorname{cosec}(90 + \theta) = \sec\theta$	$\operatorname{cosec}(180 + \theta) = -\operatorname{cosec}\theta$

Note – $(90° \pm \theta)$ की स्थित में अनुपात change होगा ।

$(270 \pm \theta)$ की स्थिति में अनुपात change होगा ।

$(180 \pm \theta)$ व $(360 + \theta)$ की स्थिति में अनुपात change नहीं होगा ।

रेडियन व डिग्री में संबंध

$180° = \pi$ रेडियन

$1° = (\pi/180)$ रेडियन

1 रेडियन $= (180/\pi)$ डिग्री

पूरक व संपूरक कोण

यदि दो कोण a व b है तब

$a + b = 90°$ (पूरक कोण युग्म)

$a + b = 180°$ (संपूरक कोण युग्म)

विशेष कोणो के त्रिकोणमितीय अनुपात

कोण / अनुपात	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$\cot\theta$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\sec\theta$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞
$\operatorname{cosec}\theta$	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

कुछ महत्वपूर्ण कोणो के त्रिकोणमितीय अनुपात

θ	15°	18°	36°	75°
$\sin\theta$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$
$\tan\theta$	$2-\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{25-10\sqrt{15}}}{5}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$

त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ

(1) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

(2) $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

(3) $\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

त्रिकोणमितीय अनुपातों का परिसर

(i) $\sin\theta$ तथा $\cos\theta$ का मान हमेशा $+1$ और -1 के बीच होता है अतः $-1 \le \sin\theta, \cos\theta \le 1$

(ii) $1 \le \operatorname{cosec}\theta \le -1$

$1 \le \sec\theta \le -1$

(iii) $\tan\theta$ व $\cot\theta$ $-\infty$ से $+\infty$ तक कुछ भी हो सकता है ।

त्रिकोणमितीय फलनो के महत्तम (Maximum) व न्यूनतम (Minimum) मान

त्रिकोणमितीय फलन	Minimum	Maximum
$\sin\theta$	-1	1
$\cos\theta$	-1	1
$K \sin n\theta$	$-K$	K
$K \cos n\theta$	$-K$	K
$a \sin\theta + b \cos\theta$	$-\sqrt{a^2+b^2}$	$\sqrt{a^2+b^2}$
$b \sin\theta + a \cos\theta$	$-\sqrt{a^2+b^2}$	$\sqrt{a^2+b^2}$
$a \sin\theta - b \cos\theta$	$-\sqrt{a^2+b^2}$	$\sqrt{a^2+b^2}$
$a\sin^2\theta + b \operatorname{cosec}^2\theta$	$2\sqrt{ab}$	नहीं निकाला जा सकता
$a\cos^2\theta + b \sec^2\theta$	$2\sqrt{ab}$	–
$a \tan^2\theta + b \cot^2\theta$	$2\sqrt{ab}$	–
$\sin\theta \cdot \cos\theta$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\sin\theta + \cos\theta$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$a\sin^2\theta + b \cos^2\theta$ $(a > b)$	b	a
$a \sin^2\theta + b \cos^2\theta$ $(a < b)$	a	b

Maximum एवं Minimum मान ज्ञात करने के लिए समान्तर माध्य (A.M.) व गुणोत्तर माध्य (G.M.) के सम्बन्ध का प्रयोग करते हैं ।

$A.M. \geq G.M.$

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$$

कुछ महत्वपूर्ण त्रिकोणमितीय सूत्र

(1) $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

(2) $\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$

(3) $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

(4) $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

(5) $\tan(A + B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

(6) $\tan(A - B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$

(7) $\cot(A + B) = \frac{cotA.cotB-1}{cotA+cotB}$

(8) $\cot(A-B)=\frac{cotA.cotB+1}{cotB-cotA}$

(9) 2 sin A cos B = sin (A + B) + sin (A – B)

(10) 2 cos A sin B = sin (A + B) – sin (A – B)

(11) 2 cos A cos B = cos (A + B) + cos (A – B)

(12) 2 sin A sin B = cos (A – B) – cos (A + B)

(13) $\sin(A+B).sin\,(A-B)=\sin^2A-\sin^2B=\cos^2B-\cos^2A$

(14) $cos\,(A+B).cos\,(A-B)=\cos^2A-\sin^2B=\cos^2B-\sin^2A$

(15) $sinC+sinD=2\sin\left(\frac{(C+D)}{2}\right).cos\left(\frac{(C-D)}{2}\right)$

(16) $\sin C-sinD=2\,cos\left(\frac{(C+D)}{2}\right).sin\left(\frac{(C-D)}{2}\right)$

(17) $cosC+cosD=2\cos\left(\frac{(C+D)}{2}\right)\cos\left(\frac{(C-D)}{2}\right)$

(18) $\cos C-\cos D=2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)sin\left(\frac{D-C}{2}\right)$

(19) $sin2A=2\,sinA\,cosA=\frac{2\,tanA}{1+\tan^2A}$

(20) $cos2A=\cos^2A-\sin^2A=1-2\sin^2A=2\cos^2A-1=\frac{1-\tan^2A}{1+\tan^2A}$

(21) $tan2A=\frac{2tanA}{1-\tan^2A}$

(22) $2\sin^2\theta=1-\cos2\theta$

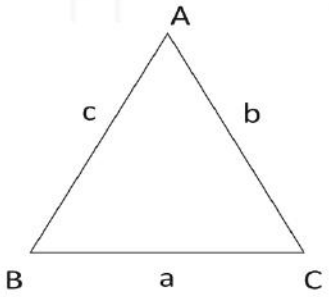
(23) $2\cos^2\theta=1+\cos2\theta$

(24) $\sin(-x)=-\sin x;\cos(-x)=\cos x;\tan(-x)=-\tan x$

किसी भी त्रिभुज के संदर्भ में cos व sin के सूत्र

ABC एक त्रिभुज है जिसमें a, b व c इसकी भुजाओं की माप है ।

cosine Formula



(i) $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

(ii) $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

(iii) $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

Sine Rule

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$ (जहाँ R = परिवृत्त की त्रिज्या)

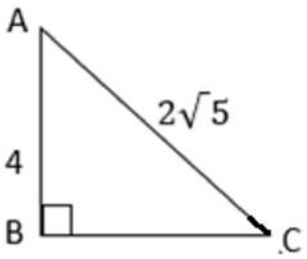
हल सहित उदाहरण

पाइथागोरस प्रमेय

उदा.1 यदि एक समकोण त्रिभुज ABC में, $\angle B$ एक समकोण है तथा AC = $2\sqrt{5}$ सेमी है । तदनुसार, यदि AB - BC = 2 सेमी हो, तो $(cos^2A - cos^2C)$ का मान क्या होगा ?

(a) 2/5 (b) 8/5 (c) 6/5 (d) 3/10

हल माना कि AB = (x + 2) सेमी



∴ BC = x सेमी

अब,

$(2\sqrt{5})^2 = x^2 + (x+2)^2$

$\Rightarrow 20 = x^2 + x^2 + 4 + 4x$

$\Rightarrow 2x^2 + 4x - 16 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0$

$\Rightarrow 2x^2 + 4x - 2x - 16 = 0$

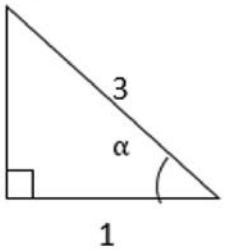
$\therefore x = 2$

अब, $(cos^2A - cos^2C)$

$= \left(\frac{4}{\sqrt{20}}\right)^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{20}}\right)^2 = \frac{16}{20} - \frac{4}{20} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$

उदा.2 यदि $\cos\theta = \frac{m}{n}$ हो, तो $\tan\theta$ = ?

(a) $\frac{8\sqrt{2}}{2}$ (b) 3.5 (c) 3.75 (d) 4



हल $\cos\theta = \frac{1}{3}$

$\frac{b}{h} = \frac{1}{3}$

$\therefore P = \sqrt{h^2 - b^2} = \sqrt{3^2 - 1^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\therefore \sin\theta + \tan\theta = \frac{b}{h} + \frac{P}{q} = \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{1} = \frac{8\sqrt{2}}{3}$

उदा.3 Δxyz में $\angle y = 90^0$, $xy = 2\sqrt{6}$ तथा $xz - yx = 2$ तो secx + tanx =?

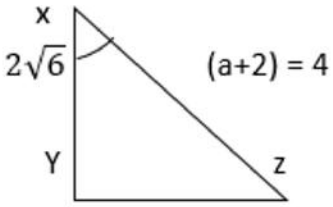
(a) Rs. 22.50 (b) Rs. 27.30 (c) Rs. 28.80 (d) Rs. 29

हल $(2\sqrt{6})^2 + a^2 = (a+2)^2$

$24 + 25 = (5+2)^2$

$\therefore a = 5$

a का मान रखो



$\text{secx} + \text{tanx} = \frac{7}{2\sqrt{6}} + \frac{5}{2\sqrt{6}} = \frac{12}{2\sqrt{6}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$

उदा.4 यदि $\text{cosec A} = \sqrt{10}$ हो तो cotA. sinA. cosA का मान कितना होगा ? θ न्यूनकोण है ।

हल $\text{cosec}\,\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}} = \frac{\sqrt{10}}{1} = \sqrt{10}$

पाइथोगोरस प्रमेय से , आधार $= \sqrt{(10)^2 - (1)^2} = \sqrt{10-1} = 3$

आधार = 3

$\text{cot A} = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}} = \frac{3}{1} = 3$

$\text{sin A} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$

$\text{cos A} = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$

$\text{cotA . sinA . cos A} = 3 \times \frac{1}{\sqrt{10}} \times \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{9}{10}$

रेडियन तथा डिग्री में संबंध

उदा.1 यदि किसी कोण का मान $\frac{3\pi}{5}$ रेडियन हो तो उस कोण का मान डिग्री में ज्ञात करें ?

हल ∵ रेडियन $= 180°$

$\therefore \frac{3\pi}{5}$ रेडियन $= \frac{3}{5} \times 180°$

$\frac{3\pi}{5} = \frac{3\times 180°}{5} = 3\times 36 = 108°$

उदा.2 $63° 14' 51''$ यदि का रेडियन माप है ?

(a) $\left(\frac{2811\pi}{8000}\right)^c$ (b) $\left(\frac{3811\pi}{8000}\right)^c$

(c) $\left(\frac{4811\pi}{8000}\right)^c$ (d) $\left(\frac{5811\pi}{8000}\right)^c$

हल (a)

1 घंटा = 3600 सेकण्ड, 1 घंटा = 60 मिनट

$\therefore 63 + \frac{14}{60} + \frac{51}{3600} = \frac{226800+840+51}{3600} = \frac{227691}{3600} = \frac{75897}{1200}$

अब, $1^c = \frac{\pi}{180}$ रेडियन

$\therefore \frac{75897}{1200} \times \frac{\pi}{180} = \left(\frac{2811\pi}{8000}\right)^c$

उदा.3 त्रिभुज ABC में, ∠ABC = 75° तथा ∠ ACB = $\frac{\pi}{4}$. ∠ BAC का वृत्तीय माप ज्ञात करो ?

(a) $\frac{5\pi}{12}$ radian (b) $\frac{\pi}{3}$ radian (c) $\frac{5\pi}{6}$ radian (d) $\frac{5\pi}{2}$ radian

हल (b)

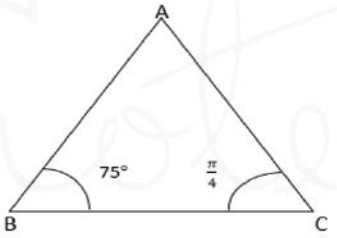
Given ∠ABC = 75° and ∠ ACB = $\frac{\pi}{4}$ rad $= \left(\frac{\pi}{4} \times \frac{180}{\pi}\right)^\circ = 45°$

$= \left(60 \times \frac{\pi}{180}\right) = \frac{\pi}{3}\ radian$

उदा.4 एक त्रिभुज ABC में, ∠ABC = 75° तथा ∠ACB = $\frac{\pi^c}{4}$ तो ∠BAC का वृत्तीय माप ज्ञात करें ।

(a) $\frac{5\pi}{12}$ radian (b) $\frac{\pi}{3}$ radian (c) $\frac{\pi}{6}$ radian

(d) $\frac{\pi}{2}$ radian



हल (b)

$\frac{\pi^\circ}{4} = \frac{180^\circ}{4} = 45^\circ$

∠BAC = 180° - 75° - 45° = 60°

180° → π

$1° \rightarrow \frac{\pi}{180°}$

$60° \rightarrow \frac{\pi}{180°} \times 60° = \frac{\pi}{3}\ radian$

उदा.5 एक त्रिभुज के दो कोणों का योग 135° है और उनका अंतर $\frac{\pi}{12}$ है तो सबसे बडा कोण कितना होगा ?

(a) $\frac{2\pi}{3}$ (b) $\frac{3\pi}{5}$ (c) $\frac{5\pi}{12}$ (d) $\frac{\pi}{5}$

हल (c)

Let a, b and c angles of triangle:

a + b = 135°

a – b = $\frac{\pi}{12} = 15°$

a = 75°, b = 60°

c = 180° - 75° - 60° = 45° Greater angle = 75° = $\frac{5\pi}{12}$

न्यून कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात

उदा.1 यदि θ एक न्यूनकोण है और tan (4θ - 50°) = cot (50° - θ), है तो θ का मान डिग्री में क्या होगा ?

(a) 30 (b) 40 (c) 50 (d) 20

हल (a)

हम जानते हैं –

tan (90° - θ) = cot θ

and cot (90° - θ) = tan θ

⇒ tan (4θ - 50°) = cot (50° - θ)

⇒ cot(90° - (4θ - 50°) = cot (50° - θ)

⇒ 90° - (4θ - 50°) = 50° - θ

⇒ 90° - 4θ + 50° = 50° - θ

⇒ 90° = 3θ then θ = 30°

2 nd Method

$\tan(4\theta-50^\circ) = \cot(50^\circ-\theta)$

सभी θ की जोड कर 90° के बराबर कर दें ।

$4\theta-50^\circ+50^\circ-\theta=90^\circ$

$3\theta=90^\circ$

$\theta=30^\circ$

उदा.2 यदि tan (2θ + 45°) = cot 3θ जहाँ (2θ + 45°) तथा 3θ न्यूनकोण हैं – तब θ का मान ?

(a) 5° (b) 9° (c) 12° (d) 15°

हल (b)

tan (2θ + 45°) = cot 3θ = tan (90° - 3θ)

∴ 2θ + 45° = 90 – 3 θ

5θ = 45 ⇒ θ = 9°

2nd Method

tan (2 θ + 45°) = cot 3 θ

2θ + 45° + 3θ = 90°

5 θ = 45°

θ = 9°

उदा.3 यदि $\sin(60-\theta) = \cos(-30°)$ है, तो $\tan(-\theta)$ है (मान ले कि θ और .. दोनों धनात्मक न्यून कोण है,) $\theta < 60°$ और .. $> 30°$ के साथ)

(a) $\frac{1}{3}$ (b) 0 (c) $\sqrt{3}$ (d) 1

हल (c)

$\sin(60° - \theta) = \cos(-30°)$

$\sin(60° - \theta) = \sin[90 - (-30°)]$

$60° - \theta = 90° + 30°$

$-\theta = 90° + 30° - 60° = 60°$

$\tan(-\theta) = \tan 60° = \sqrt{3}$

2nd Method

$\sin(60° - \theta) = \cos(-30°)$ है तो $\tan(-\theta) = ?$

$60° - \theta - 30° = 90°$

$60° - \theta = 120°$

$-\theta = 60°$

$\tan(-\theta) \Rightarrow \tan 60° \Rightarrow \sqrt{3}$

अनुपातों के विभिन्न चतुर्थांशो में चिन्ह

उदा.1 $\cot 12° \cdot \cot 38° \cot 52° \cot 60° \cot 78° = ?$

हल $\cot 12° \cdot \cot 38° \cot 52° \cot 60° \cot 78°$

$= (\cot 12° \cot 78°) \cdot (\cot 38° \cot 52°). \cot 60°$

$= [\cot 12° \cot (90° - 12°)] \cdot [\cot 38° \cdot \cot(90° - 38°)] \cot 60°$

$= [\cot 12° \cdot \tan 12°] [\cot 38° \cdot \tan 38°] \cot 60°$

$= 1 \times 1 \times \frac{1}{\sqrt{3}}$ [$\because \cot \cdot \tan = 1$ & $\cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}$]

$= \frac{1}{\sqrt{3}}$

2nd Method

$\cot 12° \cdot \cot 38° \cot 52° \cot 60° \cot 78° = ?$

पूरक कोण

जब दो कोणों का योग 90° हो तो 1 प्राप्त होगा ।

$\cot(12° + 78°) \cdot \cot(38° + 52°) \cot 60°$

$1 \times 1 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

उदा.2 यदि $\cos(\alpha + \beta) = 0$ हो तो $\sin(\alpha - \beta) = ?$

हल $\cos(\alpha + \beta) = 0$

$\Rightarrow \cos(\alpha + \beta) = \cos 90°$

$\Rightarrow \alpha + \beta = 90°$

$\Rightarrow \alpha = (90° - \beta)$

$\therefore (\alpha - \beta) = (90° - 2\beta)$

$\Rightarrow \sin(\alpha - \beta) = \sin(90° - 2\beta)$

$\therefore \sin(\alpha - \beta) = \cos 2\beta$

उदा.3 $2\,\text{cosec}^2 23° \cot^2 67° - \sin^2 23° - \sin^2 67° - \cot^2 67°$ किसके बराबर है ?

(a) 1 (b) $\sec^2 23°$ (c) $\tan^2 23°$ (d) 0

हल (b) According to question,

$\Rightarrow 2\,\text{cosec}^2 23° \cot^2 67° - \sin^2 23° - \sin^2 67° - \cot^2 67°$

$\Rightarrow 2\,\text{cosec}^2 23° \cot^2 (90° - 23°) - \sin^2 23° - \sin^2 (90° - 23°) - \cot^2 67°$

$\Rightarrow 2\,\text{cosec}^2 23° \tan^2 23° - (\sin^2 23° + \cos^2 23°) - \cot^2 67°$

$\Rightarrow \frac{2}{\cos^2 23°} - 1 - \cot^2 67°$

$\Rightarrow 2\sec^2 23° - 1 - \cot^2 (90 - 23°)$

$\Rightarrow 2\sec^2 23° - 1 - \tan^2 23°$

$\Rightarrow 2\sec^2 23° - (1 + \tan^2 23°)$

$\Rightarrow 2\sec^2 23° - \sec^2 23°$

$\Rightarrow \sec^2 23°$

अनुपातो के मध्य संबंध

उदा.1 यदि $3\tan\theta = 4$ हो तो $\frac{3\sin\theta + 2\cos\theta}{3\sin\theta - 2\cos\theta}$ का मान ज्ञात करें ?

हल $3\tan\theta = 4 \Rightarrow \tan\theta = \frac{4}{3}$

$\frac{3\sin\theta + 2\cos\theta}{3\sin\theta - 2\cos\theta}$

$= \frac{3\tan\theta + 2}{3\tan\theta - 2}$ [अंश तथा हर को $\cos\theta$ से भाग देने पर]

$= \frac{\left(3\times\frac{4}{3} + 2\right)}{\left(3\times\frac{4}{3} - 2\right)} = \frac{6}{2} = 3$ [$\tan\theta = \frac{4}{3}$]

2nd Method

$$\tan\theta=\frac{4}{3}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{4}{3}$$
$$\sin\theta=4,\cos\theta=3$$

$$\frac{3\sin\theta+2\cos\theta}{3\sin-2\cos\theta}=\frac{3\times4+2\times3}{3\times4-2\times3}=\frac{13}{6}=3$$

उदा.2 $\sqrt{\frac{\sec\theta-1}{\sec\theta+1}}+\sqrt{\frac{\sec\theta+1}{\sec\theta-1}}=?$

हल $\sqrt{\frac{sec\theta-1}{sec\theta+1}}+\sqrt{\frac{sec\theta+1}{sec\theta-1}}$

$= \frac{(sec\theta-1)+(sec\theta+1)}{\sqrt{(sec\theta+1)(sec\theta-1)}} = \frac{2\,sec\theta}{\sqrt{sec^2\theta-1}} = \frac{2sec\theta}{\sqrt{tan^2\theta}}$

$= \frac{2\,sec\theta}{tan\theta} = 2\,sec\theta\,.cot\theta$

$= \frac{2}{cos\theta}\times\frac{cos\theta}{sin\theta} = \frac{2}{sin\theta} = 2\,cosec\theta$

उदा.3 If $\text{cosec}\theta - \cot\theta = \frac{7}{2}$, the value of $\text{cosec}\theta$ is.

(a) $\frac{47}{28}$ (b) $\frac{51}{28}$ (c) $\frac{53}{28}$ (d) $\frac{49}{28}$

हल (c)

$\text{cosec}\theta - \cot\theta = \frac{7}{2}$

$\Rightarrow \text{cosec}\,\theta + \cot\theta = \frac{2}{7}$

$2\text{cosec}\theta = \frac{7}{2}+\frac{2}{7} = \frac{49+4}{14} = \frac{53}{14} = cosec\theta = \frac{53}{28}$

उदा.4 यदि $\cos\theta + \sec\theta = 2$ हो, तो $\cos^6\theta + \sec^6\theta$ का मान है ?

(a) 4 (b) 8 (c) 1 (d) 2

हल (d)

$\cos\theta + \frac{1}{cos\theta} = 2$

$\Rightarrow \cos^2\theta - 2\cos\theta + 1 = 0$

$\Rightarrow (\cos\theta - 1)^2 = 0$

$\therefore \cos\theta = 1$

$\Rightarrow \cos^6\theta + \sec^6\theta = (1)^6 + \frac{1}{(1)^6} = 1 + 1 = 2$

विशेष कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान

उदा.1 यदि $x \sin^2 60° - \frac{3}{2} \sec 60° \tan^2 30° + \frac{4}{5} \sin^2 45° \tan^2 60° = 0$ तब x होगा ?

(a) $-\frac{1}{15}$ (b) -4 (c) $-\frac{4}{15}$ (d) 2

हल (c)

$x \sin^2 60° - \frac{3}{2} \sec 60° \tan^2 30° + \frac{4}{5} \sin^2 45° \tan^2 60° = 0$

$= x. \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} \times 2. \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{4}{5} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \times \left(\sqrt{3}\right)^2 = 0$

$= \frac{3x}{4} - \frac{3}{2} \times 2 \times \frac{1}{3} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{2} \times 3 = 0$

$= \frac{3x}{4} - \frac{3}{2} \times 2 \times \frac{1}{3} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{2} \times 3 = 0$

$= \frac{3x}{4} - 1 + \frac{6}{5} = 0 \Rightarrow \frac{3x}{4} = -\frac{1}{5} \Rightarrow x = -\frac{1}{5} \times \frac{4}{3} = -\frac{4}{15}$

उदा.2 $\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\frac{\pi}{6} \cos\frac{\pi}{4} - \cot\frac{\pi}{3} \sec\frac{\pi}{6} + \frac{5\tan\frac{\pi}{4}}{12 \sin\frac{\pi}{2}}$ का मान बराबर है ?

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3/2

हल (a)

$\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\frac{\pi}{6} \cos\frac{\pi}{4} - \cot\frac{\pi}{3} \sec\frac{\pi}{6} + \frac{5\tan\frac{\pi}{4}}{12 \sin\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{5 \times 1}{12 \times 1} = \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{5}{12}$

$= \frac{3 - 8 + 15}{12} = 0$

उदा.3 $\frac{\sin 39°}{\cos 51°} + 2\tan 11° \tan 31° \tan 45° \tan 59° \tan 79° - 3 (\sin^2 21° + \sin^2 69°)$ का मान है –

(a) 2 (b) -1 (c) 1 (d) 0

हल (d)

$\frac{\sin 39°}{\cos 51°} + 2\tan 11° \tan 31° \tan 45° \tan 59° \tan 79° - 3 (\sin^2 21° + \sin^2 69°)$

$= \sin 39°. \sec 51° + 2 \times 1 - 3 (1)$

$= 1 + 2 - 3 = 0$

त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ

उदा.1 यदि $\cos^4\theta - \sin^4 = \frac{2}{3}$, तब $1 - 2\sin^2\theta$ का मान है–

(a) 4/3 (b) 0 (c) 2/3 (d) 1/3

हल (c)

$\cos^4 - \sin^4 = \frac{2}{3}$,

$= (\cos^2\theta - \sin^2\theta)(\cos^2 + \sin^2\theta) = \frac{2}{3}$

Put $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

$1 - 2\sin^2\theta = \frac{2}{3}$

उदा.2 $(\text{cosec}\theta + \sin\theta)(\text{cosec}\theta - \sin\theta)$ बराबर होगा ?

(a) $\cot\theta + \cos\theta$ (b) $\cos^2\theta + \tan^2\theta$

(c) $\cot^2\theta + \cos^2\theta$ (d) $\cot^2\theta + \cos\theta$

हल (c)

$(\text{cosec}\theta + \sin\theta)(\text{cosec}\theta - \sin\theta)$

$= \text{cosec}^2\theta - \sin^2\theta$ [$\because \text{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$]

$= 1 + \cot^2\theta - (1 - \cos^2\theta)$ [$\because \sin^2\theta = 1 - \cot^2\theta$]

$= 1 + \cot^2\theta - 1 + \cos^2\theta$

$= \cot^2\theta + \cos^2\theta$

2nd Method

$(\text{cosec}\theta + \sin\theta)(\text{cosec}\theta - \sin\theta)$

$\text{cosec}^2\theta - \sin^2\theta$

$\frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{\sin^2\theta}{1} = \frac{1 - \sin^4\theta}{\sin^2\theta}$

$= \frac{(1 - \sin^2\theta)(1 + \sin^2\theta)}{\sin^2\theta}$

$= \frac{\cos^2\theta(1 + \sin^2\theta)}{\sin^2\theta}$

$= \frac{\cos^2\theta + \cos^2\theta\sin^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} + \frac{\cos^2\theta\sin^2\theta}{\sin^2\theta}$

$= \cot^2\theta + \cos^2\theta$

उदा.3 यदि $\cos A + \cos^2 A = 1$ हो तो $\sin^2 A + \sin^4 A$ का मान ज्ञात कीजिए ?

हल $\cos A + \cos^2 A = 1$ → (i)

$\cos A = 1 - \cos^2 A$

$\cos A = \sin^2 A$ [$\because 1 - \cos^2 A = \sin^2 A$]

$\therefore \sin^2A + \sin^4A$

$= \cos A + (\sin^2A)^2$

$= \cos A + \cos^2A$

$= 1$

त्रिकोणमितीय अनुपातों का परिसर

उदा.1 $\sin^2\theta - 3\sin\theta + 2 = 0$ का वास्तविक मान क्या होगा –

(a) $0° \leq \theta < 90°$ (b) $0° < \theta < 90°$

(c) $\theta = 0°$ (d) $\theta = 90°$

हल (d)

$\sin^2\theta - 3\sin\theta + 2 = 0$ $= \sin^2\theta - 2\sin\theta - \sin\theta + 2 = 0$

$= \sin\theta(\sin\theta - 2) - 1(\sin\theta - 2) = 0$ $= (\sin\theta - 2)(\sin\theta - 1) = 0$

$= \sin\theta = 1 = \sin90° = \theta = 90° = \sin\theta \neq 2$

उदा.2 यदि $\sin(A + B) = 1$, जहा $0 < B < 45°$, तो $\cos(A - B)$ का मान क्या होगा ?

(a) sin2B (b) sinB (c) cos2B (d) cosB

हल (a)

$\sin(A + B) = 1 = \sin90° \Rightarrow A = 90° - B$ $= \cos(A - B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$

$= \cos(90 - B)\cos B + \sin(90 - B)\sin B$ $= \sin B\cos B + \cos B\sin B$

$2\sin B\cos B = 2\sin2B$

त्रिकोणमितीय फलनों के महत्तम व न्यूनतम मान

उदा.1 $2\sin^2\theta + 3\cos^2\theta$ का न्यूनतम मान क्या होगा ?

हल $2\sin^2\theta + 3\cos^2\theta$

$= 2\sin^2\theta + 3(1 - \sin^2\theta)$

$= 2\sin^2\theta + 3 - 3\sin^2\theta)$

$= 3 - \sin^2\theta$

$\sin\theta$ का अधिकतम मान 1 होता है ।

$3 - \sin^2\theta$ का न्यूनतम मान

$2 - \sin^2\theta = 3 - (1)^2 = 2$

उदा.2 $4\tan^2\theta + 9\cot^2\theta$ का न्यूनतम मान होगा ?

(a) 13 (b) 12 (c) 1 (d) 6

हल (b)

$4\tan^2\theta + 9\cot^2\theta$

न्यूनतम मान $= 2\sqrt{4 \times 9} = 2 \times 2 \times 3 = 12$

[$\therefore a\tan^2\theta + b\cot^2\theta =$ का न्यूनतम मान $= 2\sqrt{ab}$]

उदा.4 $5\cos\theta + 3\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + 3$ का अधिकतम और न्यूनतम मान क्या होगा ?

हल $5\cos\theta + 3\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + 3$

$= 5\cos\theta + \frac{3}{2}\cos\theta - \frac{3\sqrt{3}}{2}\sin\theta + 3 = \frac{13}{2}\cos\theta - \frac{3\sqrt{3}}{2}\sin\theta + 3$

अधिकतम व न्यूनतम मान

$= \pm\sqrt{\left(\frac{13}{2}\right)^2 + \left(\frac{-3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{169}{4} + \frac{27}{4}} = \pm\sqrt{49} = \pm 7$

अधिकतम मान = + 7 + 3 = 10

न्यूनतम मान = - 7 + 3 = -4

महत्वपूर्ण त्रिकोणमितीय सूत्रों पर आधारित

उदा.1 यदि A + B + C = 180° हो तो tanA + tan B + tanC =

(a) 2tan A tanB tanC (b) tanA tanB tanC

(c) cotA cotB cotC (d) 3 tanA tanB tanC

हल (b)

A + B + C = 180°

= A + B = 180° - C

= tan (A + B) = tan (180° - C)

$= \frac{tanA+tanB}{1-tanAtanB} = -tanC$

= tanA + tanB = - tanC + tanA tanB tanC

= tanA + tanB + tanC = tanA. tanB . tanC

उदा.2 $\tan\theta(1 + \sec2\theta)(1 + \sec4\theta)(1 + \sec8\theta)$ का मान ज्ञात करो ?

(a) tan 10θ (b) tan 8θ (c) tan 12θ (d) 1

हल (b)

$\tan\theta(1 + \sec2\theta)(1 + \sec4\theta)(1 + \sec8\theta)$

$= \tan\theta\left(1 + \frac{1}{cos2\theta}\right)\left(1 + \frac{1}{cos4\theta}\right)\left(1 + \frac{1}{cos8\theta}\right)$

$= \tan\theta\left(\frac{cos2\theta+1}{cos2\theta}\right)\left(\frac{cos4\theta+1}{cos4\theta}\right)\left(\frac{cos8\theta+1}{cos8\theta}\right)$

$= \tan\theta\left(\frac{2\cos^2\theta}{cos2\theta}\right)\left(\frac{2\cos^2 2\theta}{cos4\theta}\right)\left(\frac{2\cos^2 4\theta}{cos8\theta}\right) \quad [\therefore 1 + \cos^2\theta = 2\cos^2\theta]$

$= 8.\frac{tan\theta\ .cos^2\theta.cos2\theta.cos4\theta}{cos8\theta}$

$= 4.\frac{2.sin\theta\ .cos\theta.cos2\theta.cos4\theta}{cos8\theta}$

$= 4.\frac{sin2\theta\ .cos2\theta.cos4\theta}{cos8\theta} \quad [2\ sin\theta\ .cos\theta = sin2\theta]$

$= 2.\frac{sin4\theta.cos4\theta}{cos8\theta} = \frac{sin8\theta}{cos8\theta} = tan8\theta$

उदा.3 tan 56° का मान क्या होगा ?

(a) $\frac{cos11°-sin11°}{cos11°+sin11°}$ (b) $\frac{cos11°+sin11°}{cos11°-sin11°}$

(c) $\frac{cos11°+sin11°}{sin11°-cos11°}$ (d) $\frac{\sin11°-\cos11°}{cos11°-sin11°}$

हल (b)

$$\tan 56° = \tan(45° + 11°) = \frac{tan45° + tan11°}{1 - tan45°.tan11°}$$

$$\therefore \tan(56°) = \frac{1+tan11°}{1-tan11°} = \frac{1+\frac{sin11°}{cos11°}}{1-\frac{sin11°}{cos11°}}$$

$$= \frac{cos11° + sin11°}{cos11° - sin11°}$$

बीजगणितीय सूत्रों पर आधारित

उदा.1 यदि $\sin A + \sin B = -\frac{21}{65}$, $\cos A + \cos B = -\frac{27}{65}$ और $\pi < (A - B) < 3\pi$ है, तब $\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए ।

(a) $\frac{-3}{\sqrt{130}}$ (b) $\frac{3}{\sqrt{130}}$ (c) $\frac{6}{65}$ (d) $\frac{-6}{65}$

हल (b)

$\sin A + \sin B = -\frac{21}{65}$ .. (i)

$\cos A + \cos B = -\frac{27}{65}$ .. (ii)

समीकरण को वर्ग करने के बाद जोडने पर

$= \sin^2 A + \sin^2 B + 2 \sin A.\sin B + \cos^2 A + \cos^2 B + 2 \cos A.\cos B$

$= \left(-\frac{21}{65}\right)^2 + \left(-\frac{27}{65}\right)^2 = \frac{21^2+27^2}{65^2} = \frac{3^2(7^2+9^2)}{65^2} = \frac{9(49+51)}{65\times65} = \frac{9\times130}{65\times65} = \frac{18}{65}$

$= 2 + 2(\sin A . \sin B + \cos A. \cos B) = \frac{18}{65}$

$= 1 + \sin A. \sin B + \cos A. \cos B = \frac{9}{65}$

$= \cos(A - B) = -\frac{56}{65}$

$= 2\cos^2\left(\frac{A-B}{2}\right) - 1 = -\frac{56}{65} = 2\cos 2\left(\frac{A-B}{2}\right) = -\frac{56}{65} + 1 = \frac{9}{65}$

$= \cos^2\left(\frac{A-B}{2}\right) = \frac{9}{130} = \cos 2\left(\frac{A-B}{2}\right) = \frac{3}{\sqrt{130}}$

उदा.2 अगर $c.\cos^3\theta + 3c.\cos\theta \sin^2\theta = m$, $c.\sin^3\theta + 3c.\cos^2\theta \sin\theta = n$ है तब $[(m + n)^{2/3}]$ का मान ज्ञात कीजिए ।

(a) 1 (b) $2c^{3/2}$ (c) $2c2/3$ (d) c

हल (c)

$c.\cos^3\theta + 3c.\cos\theta \sin^2\theta = m$ .....(1)

$c.\sin^3\theta + 3c.\cos^2\theta \sin\theta = n$ .....(2)

समीकरण (1) व (2), को जोडने पर

= $c(\sin^3\theta + \cos^3\theta) + 3c.\sin\theta\cos\theta(\sin\theta + \cos\theta) = m + n$

= $c[(\sin^3\theta + \cos^3\theta + 3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta + \cos\theta)] = m + n$

= $c(\cos\theta + \sin\theta)^3 = m + n$

= $(\cos\theta + \sin\theta)^2 c^{2/3} = (m + n)^{2/3}$

= $\frac{(m+n)^{2/3}}{c^{2/3}} = (cos\theta + sin\theta)^2 = 1 + 2\,sin\theta cos\theta$

समीकरण (1) व (2), को घटाने पर

= $c[\cos^3\theta - \sin^3\theta - 3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta - \cos\theta)] = m + n$

= $c(\cos\theta - \sin\theta)^3 = m - n$

= $(m - n)^{2/3} = c^{2/3}(\cos\theta - \sin\theta)^2$

= $\frac{(m+n)^{2/3}}{c^{2/3}} = (cos\theta - sin\theta)^2 = 1 - 2\,sin\theta cos\theta$

समीकरण (3) व (4), को जोडने पर

= $\frac{(m+n)^{2/3}}{c^{2/3}} + \frac{(m-n)^{2/3}}{c^{2/3}} = 2$

= $(m - n)^{2/3} + (m + n)^{2/3} = 2c^{2/3}$