



3rd - ग्रेड



अध्यापक

लेवल - द्वितीय

कार्यालय निदेशक, प्रारम्भिक शिक्षा
राजस्थान बीकानेर

भाग - 5 (II)

विज्ञान - (ब)

गणित



3rd GRADE TEACHER

CONTENTS

गणित

1.	घातांक	1
2.	बीजीय व्यंजक	6
3.	समीकरण	18
4.	गुणनखण्ड	20
5.	वर्ग और वर्गमूल	22
6.	घन और घनमूल	26
7.	सरल ब्याज एवं चक्रवृद्धि ब्याज	29
8.	लाभ-हानि	51
9.	बट्टा	65
10.	प्रतिशतता	74
11.	अनुपात एवं समानुपात	84
12.	आयु	96
13.	भिन्न	100
14.	रेखा तथा कोण	107
15.	समतलीय आकृतियाँ	114
16.	बहुभुज	132
17.	समतलीय आकृतियों का क्षेत्रफल एवं परिमाप	134
18.	पृष्ठीय क्षेत्रफल एवं आयतन (घन, घनाभ, बेलन, शंकु)	167
19.	आँकड़ों का प्रबन्धन	176
20.	प्रायिकता	187
21.	गणित की प्रकृति एवं तर्कशक्ति	201
22.	गणित की महत्ता	204
23.	गणित की भाषा एवं सामुदायिक गणित	206

24.	गणित की शिक्षण विधियाँ एवं सहायक सामग्री	208
25.	शिक्षण की समस्याएँ	216
26.	गणित में मूल्यांकन	217
27.	निदानात्मक एवं उपचारात्मक शिक्षण	220

घातांक

- जिसकी घात 0 होती है, उसका मान हमेशा 1 होता है।
जैसे—
 - (i) 2^0 का मान = 1
 - (ii) x^0 का मान = 1
 - (iii) $\left(\frac{x}{4}\right)^0$ का मान = 1
- यदि आधार समान होता है और बीच में गुणा का चिन्ह होता हो तो घातें हमेशा जुड़ जाती हैं।
जैसे—
 - (i) $2^3 \cdot 2^5 = 2^8$
 - (ii) $2^5 \cdot 2^7 \cdot 3^8 = 2^{12} \cdot 3^8$
- आधार समान हो और बीच में बराबर का चिन्ह हो तो आधार से आधार कट जाता है।
जैसे—

$$2^5 = 2^x \Rightarrow x = 5$$
- यदि घात पर घात होती हो तो आपस में गुणा हो जाती है।
जैसे—
 - (i) $(2^3)^5 = 2^{15}$
 - (ii) $(2^4)^5 = 2^{20}$
- यदि आधार भिन्नों के रूप में होता हो और समान भी होता हो तो बड़ी घात में से छोटी घात हटा देते हैं, या घातों को ऊपर-नीचे करते हैं, तो उनके चिन्ह बदल जाते हैं।
 - (i) $\frac{2^9}{2^3} = 2^{9-3} = 2^6$
 - (ii) $256^{0.16} \times 16^{0.18} = (16^2)^{0.16} \times (16)^{0.18}$
 $(16)^{0.32} + 16^{0.18}$
 $(2^2)^{0.50} = 4^1 = 4$
 - (iii) $4(3-1)^0 + 3^2 \div 1 + 3 = ?$
 $4 - 1 + 9 \div 1 + 3 = 16 - 1 = 15$ Ans

नोट –

- 1 से 100 तक में शून्यों की संख्या 11 होती है।
- 1 से 100 तक में एक अंक का उपयोग 21 बार किया गया है।
- 1 के अलावा सभी अंकों का उपयोग 20-20 बार किया जाता है।
- 1 से 100 तक की संख्या में कुल अंकों की संख्या 192 में होती है।
- 1 अंकों की संख्या 9
- 2 अंकों की संख्या 90
- 3 अंकों की संख्या 900
- 4 अंकों की संख्या 9000

Q. 1 $1 - 2 + 3 - 4 \dots\dots + 75$ का योगफल कितना होगा।

हल- $\frac{75+1}{2} = \frac{76}{2} = 38$

Q. 2 3 अंकों की ऐसी कितनी संख्याएँ हैं, जो 6 से पूर्णतः विभाजित हो जाती हैं और इनका योगफल कितना है ?

हल- $\frac{100}{6} = 16, \frac{999}{6} = 166$

संख्याएँ = $166 - 16 = 150$

योगफल = $\frac{\text{कुल संख्याएँ (पहली संख्या + अंतिम संख्या)}}{2}$

Q. 3 400 से 1000 तक ऐसी कितनी संख्याएँ हैं, जिनमें 4 व 6 दोनों संख्याओं का भाग जाता है ?

हल- 4 व 6 का ल.स. = 12

$\frac{400}{12} = 33, \frac{1000}{12} = 83 \Rightarrow 83 - 33 = 50$ Ans

Q. 4 400 से 800 के बीच में ऐसी कितनी संख्याएँ हैं, जो 25 से विभाजित होती हैं ?

हल- गलत तरीका $\frac{400}{25} = 16, \frac{800}{25} = 32$ अतः संख्याएँ = $31 - 16 = 16$

सही तरीका $\frac{401}{25} = 16, \frac{799}{25} = 31$ अतः संख्याएँ = $31 - 16 = 15$ Ans

Q. 5 किसी भिन्न के अंश तथा हर का योग 11 है। यदि अंश में 1 घटा दिया जाए और हर में 2 जोड़ दिया जाए तो $\frac{1}{2}$ प्राप्त होता है। बताओं वह भिन्न क्या है?

हल- माना भिन्न $\frac{x}{y}$ है तथा $x + y = 11$ (1)

$\frac{x-1}{y+2} = \frac{1}{2}$

$2x - 2 = y + 2$

$2x - y = 4$ (2)

समी. (1) व (2) से $x = 5, y = 6$ अतः भिन्न = $\frac{5}{6}$

Q. 6 किसी भिन्न के अंश में 25% की वृद्धि कर दी गई तथा उसके हर में 25% की कमी कर दी गई तो $\frac{5}{4}$ प्राप्त होता है। बताओं वह भिन्न क्या है ?

हल- माना भिन्न है = $\frac{x}{y}$

$\frac{x \text{ का } 125\%}{y \text{ का } 75\%} = \frac{5}{4}$

$$= \frac{5x}{3y} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{15}{20}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$$

Q. 7 $1 \times 2 \times 3 \times 4 \dots\dots\dots 100$ तो बताओं गुणनखण्ड में कितनी शून्य होगी।

हल- $\frac{100}{5} = 20$, अतः $= \frac{20}{5} = 4$, $= 20 + 4 = 24$

Q. 8 $1 \times 3 \times 5 \dots\dots\dots$ अनंत विषम संख्या में शून्य है।

हल- विषम संख्याओं के गुणनफल में शून्य कभी भी नहीं आता है।

Q. 9 $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \dots\dots\dots$ अभाज्य संख्या के गुणनफल में शून्य होगा।

हल- अभाज्य संख्याओं के गुणनफल में केवल 1 ही शून्य आती है।

Q. 10 $2 \times 4 \times 6 \times 8 \dots\dots\dots 60$ तक गुणनफल में शून्य की संख्या कितनी होगी ?

हल- 60 संख्याओं में 30 सम तथा 30 विषम संख्याएँ होगी।

$$\frac{30}{5} = 6 + 1 = 7$$

Q. 11 $2 \times 4 \times 6 \times 8 \dots\dots\dots 90$ तक गुणनफल में शून्यों की संख्या होगी ?

हल- $\frac{45}{5} = 9 + 1 = 10$

Q. 12 $\frac{720 \times 720 \times 720 + 180 \times 180 \times 180}{720 \times 720 - 720 \times 180 + 180 \times 180} \left[\frac{a^3 + b^3}{a^2 - ab + b^2} \right]$

हल- $\frac{(a+b)(a^2 - \cancel{ab} + b^2)}{(a^2 - \cancel{ab} + b^2)} = a + b = 720 + 180 = 900$ Ans

Q. 13 $\frac{210 \times 210 - 210 \times 190 + 190 \times 190}{210 \times 210 \times 210 + 190 \times 190 \times 190}$

हल- $\frac{a^2 - ab + b^2}{a^3 + b^3} = \frac{1}{(a+b)} = \frac{1}{210+190} = \frac{1}{400}$

Q. 14 $\frac{3.25 \times 3.25 \times 3.25 - 1.75 \times 1.75 \times 1.75}{3.25 \times 3.25 + 3.25 \times 1.75 + 1.75 \times 1.75} \left[\frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2} \right]$

हल- $\frac{3.25 - 1.75}{1} = \left(\frac{1.50}{1} \right)$ Ans

Q. 15 $\frac{(520+480)^2 - (520-480)^2}{520 \times 480} \left[\frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{a \times b} \right]$

हल- $\frac{(x^2 + 2x - y^2) - (x^2 - 2x + y^2)}{xy}$
 $= \frac{4xy}{xy} = 4$

नोट - (बीच में (-) का चिन्ह आए तो उत्तर = 4 होगा। यदि (+) का चिन्ह आए तो उत्तर 2 होगा।)

Q. 16 $\frac{(325+175)^2 + (325-175)^2}{325 \times 325 + 175 \times 175}$

हल- 2 Ans होगा।

Q. 17 19.5 मीटर लम्बा एक लकड़ी का डण्डा है, तो बताइए की इससे 65 cm के कितने टुकड़े बनाए जा सकते हैं ?

हल- $\frac{195}{65} \times \frac{100}{10} = 30$

Q. 18 एक कक्षा प्रातः 7 बजे प्रारम्भ होती है। 10:12 बजे छुट्टी हो जाती है। इस अंतराल में 4 कालांश लगते हैं। प्रत्येक कालांश के बाद 4 मिनट का रेस्ट होता है, तो प्रत्येक पिरियड का समय कितना होगा ?

हल- 7 बजे से 10:12 बजे के बीच समय = 3 घंटे 12 मिनट = $3 \times 60 + 12$
 $= 180 + 12$ [$4 \times 3 = 12$]
 $\frac{180}{4} = 45$ मिनट
 अंतिम कालांश के बाद व पहले कालांश से पहले ब्रेक नहीं होता है।

Q. 19 किसी संख्या को 21 से गुणा करने के लिए कहा गया गलती से उसने 12 से गुणा कर दिया जिसके कारण से प्राप्त उत्तर पहले से 63 कम आया। बताओं वह संख्या क्या थी।

हल- संख्या $\Rightarrow \left[\frac{\text{कम/ज्यादा}}{\text{सही संख्या} - \text{गलत संख्या}} \right] \frac{63}{21-12} = \frac{63}{9} = 7$ Ans

Q.20 दो संख्याओं का योग 100 है और अंतर 37 है तो बताइए की इनके वर्गों का अंतर क्या होगा ?

हल- पहली संख्या = $\frac{\text{योग} + \text{अंतर}}{2}$
 दूसरी संख्या = $\frac{\text{योग} - \text{अंतर}}{2}$
 $(x^2 - y^2) = (x + y)(x - y) = 100 \times 37 = 3700$

Q. 21 एक संख्या 80 से उतनी अधिक है, जितनी 140 से कम है तो बताइए वह संख्या क्या है?

हल- संख्या = $\frac{\text{कम} + \text{अधिक}}{2} = \frac{80 + 140}{2} = \frac{220}{2} = 110$

Q. 22 राम के पास कुल 85 नोट हैं, ये नोट ₹50 व ₹100 के हैं, इन नोटों का मूल्य ₹5000 है। बताओं ₹50 के नोटों की संख्या कितनी है।

(a) 70

(b) 30

(c) 40

(d) 50

हल- By Option से

$$70 \times 50 = 3500 \text{ रु.}$$

$$15 \times 100 = 1500 \text{ रु.}$$

5000 रु. उत्तर

बीजगणितीय सर्वसमिकाएँ (Algebraic Identities)

महत्वपूर्ण नियम

1. $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
2. $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$
3. $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$
4. $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$
5. $(a^2 - b^2) = (a+b)(a-b)$
6. $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$
7. $(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$
8. $(a^3 + b^3) = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
9. $(a^3 - b^3) = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
10. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$
11. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$
 $= \frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$
12. $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$
13. If, $ax^2 + bx + c = 0$ than, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

कुछ महत्वपूर्ण नियम

14. यदि $x + \frac{1}{x} = a$ तो
 - (i) $x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2 = b$
 - (ii) $x^4 + \frac{1}{x^4} = b^2 - 2$
15. यदि $x - \frac{1}{x} = a$ तो
 - (i) $x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 + 2$
 - (ii) $x^4 + \frac{1}{x^4} = b^2 - 2$, जहाँ $b = a^2 + 2$

16. $x^4 - \frac{1}{x^4} = a$, तब

(i) $x^2 + \frac{1}{x^2} = \sqrt{a+2} = b$

(ii) $x + \frac{1}{x} = \sqrt{b+2}$

(iii) $x - \frac{1}{x} = \sqrt{b-2}$

17. यदि $x + \frac{1}{x} = 2$ तो $x = 1$

18. यदि $x + \frac{1}{x} = -2$ तो $x = -1$

19. $x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$

20. $x^3 - \frac{1}{x^3} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3\left(x - \frac{1}{x}\right)$

21. यदि $x + \frac{1}{x} = -1$ तो $x^3 = 1$

22. यदि $x + \frac{1}{x} = +1$ तो $x^3 = -1$

23. यदि $x + \frac{1}{x} = \sqrt{3}$ तो $x^3 + \frac{1}{x^3} = 0, x^6 = -1$ या $\boxed{x^6 + 1 = 0}$

24. यदि $ax + by = m$ तथा $bx - ay = n$ हो तो

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = m^2 + n^2$$

Note

यदि वास्तविक संख्याओं के वर्गों का योग 0 है तो वे सभी संख्याएँ 0 ही होंगी।

यदि $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = 0$, तो

$$x - a = 0 \Rightarrow x = a$$

$$y - b = 0 \Rightarrow y = b$$

$$z - c = 0 \Rightarrow z = c$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0, \text{ तो } x = 0, y = 0, z = 0$$

Exercise

1. यदि $a = -5, b = 6, c = 10$ तो $\frac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{(ab + bc + ca - a^2 - b^2 - c^2)}$ का मान होगा ?

Ans. 11

2. यदि $x - \frac{1}{x} = 6$ तो $x^2 + \frac{1}{x^2}$ का मान होगा ?

Ans. 38

3. यदि $x^2 + \frac{1}{x^2} = 51$ तो $x - \frac{1}{x}$ का मान होगा ?

Ans. 7

4. $x - \frac{3}{x}$ का मान ज्ञात कीजिये यदि $x + \frac{3}{x} = 4$ हो ?

Ans. ± 2

5. $x - \frac{1}{x} = 6$, तो $x^3 - \frac{1}{x^3}$ का मान होगा ?

Ans. 234

6. $x + \frac{1}{x} = 2$, तो $x^3 + \frac{1}{x^3}$ का मान होगा ?

Ans. 2

7. $x + \frac{1}{x} = 2$ तो $x^{17} + \frac{1}{x^{17}}$ का मान होगा ?

Ans. 2

8. यदि $x + y + z = 15$, $xy + yz + zx = 85$, तो $x^2 + y^2 + z^2$ का मान होगा?

Ans. 55

9. यदि $x^2 + y^2 + z^2 = 576$ और $xy + yz + zx = 50$, तो $x + y + z$ का मान होगा?

Ans. ± 26

10. यदि $5x - \frac{5}{x} = 10$, तो $x^2 + \frac{1}{x^2}$ का मान होगा ?

Ans. 6

11. यदि $x = \frac{a^2 - 25}{a^2 - 36}$ और $y = \frac{a + 5}{a + 6}$, तो $\frac{x}{y}$ का मान ज्ञात करे ?

Ans. $\frac{a - 5}{a - 6}$

12. यदि $x = a^{2/3} - a^{-2/3}$ तो $x^3 + 3x$ का मान ज्ञात करे ?

Ans. $a^2 - \frac{1}{a^2}$

13. $\frac{x^2 - y^2 - 2yz - z^2}{x^2 + y^2 + 2xy - z^2} = ?$

Ans. $\frac{x-y-z}{x+y-z}$

14. यदि $x = 27$ और $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{729}$, तो y का मान ज्ञात करें ?

Ans. 216

15. यदि $(a-b)=3, (b-c)=5$ और $(c-a)=1$ तो $\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{a+b+c}$ का मान ज्ञात करें ?

Ans. 17.5

16. यदि $a+b=5, a^2+b^2=13$ तो $a-b$ का मान होगा ? (जहाँ $a > b$)

Ans. 1

17. यदि $a + \frac{1}{a+2} = 0$, तो $(a+2)^3 + \frac{1}{(a+2)^3}$ का मान होगा?

Ans. 2

18. यदि $a = 25, b = 15, c = -10$ तो $\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}$ का मान है?

Ans. 15

19. यदि $x + \frac{1}{16x} = 1$, तो $64x^3 + \frac{1}{64x^3}$ का मान ज्ञात कीजिए ?

Ans. 52

20. यदि $x + \frac{1}{x} = 6$ तो $\frac{3x}{2x^2+2-5x}$ का मान ज्ञात कीजिए ?

Ans. 3/7

21. यदि $\frac{4P}{P^2-4P+4} = \frac{1}{8}, P \neq 0$ तो $P + \frac{4}{P}$ का मान होगा ?

Ans. 36

22. यदि $x^2 - 3x + 6 = 0$, तो $x^2 + \frac{36}{x^2}$ का मान बताइये ?

Ans. -3

23. यदि $4x^2 + y^2 + 4z^2 + 3 = 4z + 2y - 4x$, तो $x + y + z$ का मान ज्ञात कीजिये?

Ans. 1

24. $\frac{3-5x}{x} + \frac{3-5y}{y} + \frac{3-5z}{z} = 0$, तो $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ का मान होगा ?

Ans. 5

25. यदि $x^2 - 3x + 1 = 0$ और $x > 1$, तो $\left(x - \frac{1}{x}\right)$ का मान होगा ?

Ans. $\sqrt{5}$

26. यदि $x = 2 + \sqrt{3}$, तो $\frac{x^6 + x^4 + x^2 + 1}{x^3}$ का मान ज्ञात कीजिये ?

Ans. 56

27. यदि $x^4 + \frac{1}{x^4} = 23$ तो $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2$ का मान ज्ञात कीजिये?

Ans. 3

28. यदि x वास्तविक संख्या है और $x^4 + \frac{1}{x^4} = 119$ हो तो $\left(x - \frac{1}{x}\right)$ का मान ज्ञात कीजिये?

Ans. ± 3

29. यदि $a = 3 + 2\sqrt{2}$, तो $\frac{a^6 + a^4 + a^2 + 1}{a^3}$ का मान ज्ञात कीजिये ?

Ans. 204

30. यदि $x^2 + 3x + 1 = 0$ तो $x^3 + \frac{1}{x^3}$ का मान ज्ञात कीजिये ?

Ans. -18

Solution

$$\begin{aligned}
 1. \quad \frac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)} &= \frac{(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)}{(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)} \\
 &= (a+b+c) \\
 &= (-5+6+10) \\
 &= 11
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad x - \frac{1}{x} &= 6 \\
 \therefore x^2 + \frac{1}{x^2} &= \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 = 6^2 + 2 = 36 + 2 \\
 &= 38
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad x^2 + \frac{1}{x^2} &= 51 \\
 \therefore x - \frac{1}{x} &= \sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 2} \\
 &= \sqrt{51 - 2} \\
 &= \sqrt{49} \\
 &= 7
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. \quad \left(x - \frac{3}{x}\right)^2 &= \left(x + \frac{3}{x}\right)^2 - 4 \times x \times \frac{3}{x} \\
 \left(x - \frac{3}{x}\right)^2 &= 4^2 - 12 \\
 &= 16 - 12 \\
 &= 4
 \end{aligned}$$

$$\left(x - \frac{3}{x}\right)^2 = 4 \Rightarrow \boxed{\left(x - \frac{3}{x}\right) = \pm 2}$$

5. $x^3 - \frac{1}{x^3} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3\left(x - \frac{1}{x}\right)$

$$= (6)^3 + 3 \times 6$$

$$= 216 + 18$$

$$= 234$$

6. जैसा कि हम जानते हैं, यदि $x + \frac{1}{x} = 2 \Rightarrow x = 1$ जो कि इसे संतुष्ट करता है।

$$\therefore x^3 + \frac{1}{x^3}$$

$$= 1 + 1$$

$$= 2$$

Alternatively

$$\therefore x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$= 2^3 - 3 \times 2$$

$$= 8 - 6$$

$$= 2$$

7. $x + \frac{1}{x} = 2 \Rightarrow x = 1$ (इसे संतुष्ट करता है।)

$$\therefore x^{17} + \frac{1}{x}$$

$$= 1 + 1$$

$$= 2$$

8. $x + y + z = 15$

$$\Rightarrow (x + y + z)^2 = (15)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 225$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 225 - 2 \times 85$$

$$= 225 - 170$$

$$= 55$$

9. $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$

$$= 576 + 2(50) = 676$$

$$\therefore x + y + z = \pm \sqrt{676}$$

$$= \pm 26$$

10. $5x - \frac{5}{x} = 10, \quad x - \frac{1}{x} = 2$

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 4$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = 4$$

$$\boxed{x^2 + \frac{1}{x^2} = 6}$$

11. $\frac{x}{y} = \frac{\left(\frac{a^2 - 25}{a^2 - 36}\right)}{\left(\frac{a+5}{a+6}\right)} = \frac{(a+5)(a-5)}{(a+6)(a-6)}$

$$= \frac{a-5}{a-6}$$

12. $x = a^{2/3} - a^{-2/3}$ दोनो पक्षो का cube करने पर -

$$x^3 = (a^{2/3} - a^{-2/3})^3$$

$$x^3 = (a^{2/3})^3 - (a^{-2/3})^3 - 3.a^{2/3}.a^{-2/3}(a^{2/3} - a^{-2/3})$$

$$\Rightarrow x^3 = a^2 - a^{-2} - 3 \times 1(x)$$

$$\Rightarrow x^3 + 3x = a^2 - a^{-2} = a^2 - \frac{1}{a^2}$$

$$a^2 - \frac{1}{a^2}$$

13. दिया गया व्यंजक $\frac{x^2 - (y^2 + 2yz + z^2)}{(x^2 + y^2 + zxy) - z^2}$

$$= \frac{x^2 - (y+z)^2}{(x+y)^2 - z^2} = \frac{[x+(y+z)][x-(y+z)]}{(x+y+z)(x+y-z)}$$

$$= \frac{x-y-z}{x+y-z}$$

14. $x = 27$

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{729} \Rightarrow 3 + \sqrt[3]{y} = 9$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{y} = 9 - 3 = 6$$

$$\therefore y = (6)^3$$

$$= 216$$

15. $\frac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{a + b + c}$

$$= \frac{1}{2} \frac{(a+b+c) \left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \right]}{a+b+c}$$

$$= \frac{1}{2} \left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{2} [9 + 25 + 1]$$

$$= \frac{35}{2}$$

$$= 17.5$$

16. $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

$$\Rightarrow 25 = 13 + 2ab$$

$$\Rightarrow 2ab = 25 - 13 = 12$$

$$\Rightarrow \therefore (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = 13 - 12 = 1$$

$$\Rightarrow a - b = 1$$

17. $a + \frac{1}{a+2} = 0 \Rightarrow a + 2 + \frac{1}{a+2} - 2 = 0$ घन करने पर

$$\Rightarrow \left(a + 2 + \frac{1}{a+2} \right)^3 = (2)^3$$

$$\Rightarrow (a+2)^3 + \frac{1}{(a+2)^3} + 3(a+2) \times \frac{1}{(a+2)} \left(a + 2 + \frac{1}{a+2} \right) = 8$$

$$\Rightarrow (a+2)^3 + \frac{1}{(a+2)^3} + 3 \times 2 = 8$$

$$\Rightarrow (a+2)^3 + \frac{1}{(a+2)^3} = 8 - 6 = 2$$

18. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

$$= \frac{1}{2}(a+b+c) \left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \right]$$

व्यंजक $= \frac{1}{2} \frac{(a+b+c) \left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \right]}{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}$

$$= \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2} [25 + 15 - 10]$$

$$= 15$$

19. $x + \frac{1}{16x} = 1$ दोनो तरफ 4 से गुणा करने पर—

$$4x + \frac{1}{4x} = 4$$

$$\text{अब } 64x^3 + \frac{1}{64x^3} = (4x)^3 + \frac{1}{(4x)^3}$$

$$= \left(4x + \frac{1}{4x}\right)^3 - 3\left(4x + \frac{1}{4x}\right)$$

$$= 4^3 - 3 \times 4$$

$$= 64 - 12$$

$$= 52$$

20. दिया हुआ, $x + \frac{1}{x} = 6$,

$$\Rightarrow \frac{3x}{2x^2 + 25x} = \frac{3x}{x \left[\left(2x + \frac{2}{x}\right) - 5 \right]}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2 \left[x + \frac{1}{x} \right] - 5}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2 \times 6 - 5}$$

$$= \frac{3}{7}$$

21. दिया गया व्यंजक $\frac{P^2 - 4P + 4}{4P} = 8$

$$\Rightarrow \frac{P^2 - 4P + 4}{P} = 32$$

$$\Rightarrow \frac{P^2}{P} - \frac{4P}{P} + \frac{4}{P} = 32$$

$$\Rightarrow P - 4 + \frac{4}{P} = 32$$

$$\Rightarrow P + \frac{4}{P}$$

$$= 36$$

22. $x^2 - 3x + 6 = 0 \Rightarrow x^2 + 6 = 3x$ दोनो पक्षो को x से भाग करने पर $x + \frac{6}{x} = 3$

दोनो पक्षो का वर्ग करने पर -

$$\Rightarrow x^2 + \frac{36}{x^2} + 2x \frac{6}{x} = 9$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{36}{x^2} = 9 - 12$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{36}{x^2} = -3$$

$$= -3$$

23. दिया गया व्यंजक $-4x^2 + y^2 + 4z^2 + 3 - 4z - 2y + 4x = 0$

$$\Rightarrow (2x+1)^2 + (y-1)^2 + (2z-1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow 2x+1=0$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$y+1=0 \Rightarrow y=1 \quad x+y+z = \frac{-1}{2} + 1 + \frac{1}{2} = 1 \text{ Ans}$$

$$2z-1=0$$

$$z = \frac{1}{2}$$

24. $\frac{3-5x}{x} + \frac{3-5y}{y} + \frac{3-5z}{z} = 0$

$$\Rightarrow \frac{3}{x} - \frac{5x}{x} + \frac{3}{y} - \frac{5y}{y} + \frac{3}{z} - \frac{5z}{z} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{3}{x} + \frac{3}{y} + \frac{3}{z} - 15 = 0$$

$$\Rightarrow 3 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = 15$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 5$$

25. $x^2 - 3x + 1 = 0$

$$\Rightarrow x \left(x - 3 + \frac{1}{x} \right) = 0$$

$$\Rightarrow x + \frac{1}{x} = 3$$

$$\therefore \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 = \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 - 4$$

$$= 9 - 4 = 5$$

$$\therefore x - \frac{1}{x} = \sqrt{5}$$