



IIT - JEE

JEE MAIN & ADVANCED

NATIONAL TESTING AGENCY

गणित

भाग - 2



विषय सूची

1. अनुक्रम तथा श्रेणी	1
2. निर्देशांक ज्यामिती	65
3. सरल रेखाएं	107
4. शंक परिच्छेद	171
5. दीर्घवृत्त	273
6. अतिपरवलय	289
7. सीमा और अवकलन	308
8. सांख्यिक	320

सांख्यिकी

(i). Mean (माध्य) \rightarrow n प्रेक्षणों का

माध्य \bar{x} से प्रदर्शित करते हैं तथा इसे निम्न प्रकार

परिभाषित करते हैं।

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

या

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

(ii). Median (माध्यिका) \rightarrow n क्रमागत प्रेक्षणों (वर्धमान व

हासमान) के लिए माध्यिका के लिए माध्यिका μ से

प्रदर्शित की जाती है। तथा इसे निम्न प्रकार परिभाषित

करते हैं।

$M = \left(\frac{n+1}{2}\right)$ वाँ प्रेक्षण ; यदि n विषम है।

$= \frac{(n/2) \text{ वाँ प्रेक्षण} + (n/2+1) \text{ वाँ प्रेक्षण}}{2}$ n सम है।

(iii). Mode (बहुलक) :→ n प्रेक्षणों का बहुलक निम्न सम्बन्ध द्वारा निकाला जाता है।

$$\text{mode} = 3(\text{Median}) - 2(\text{Mean})$$

(iv). Deviation (विचलन) :→ n प्रेक्षणों $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ का

किसी संख्या A के सापेक्ष विचलन $x_1 - A, x_2 - A, x_3 - A, \dots, x_n - A$ होता है।

(v). Mean Deviation (माध्य - विचलन) :→

प्रेक्षणों के विचलनों के मापकों का माध्य, माध्य विचलन कहलाता है।

माध्य के सापेक्ष $M.D. = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n}$

माध्यिका के सापेक्ष $M.D. = \frac{\sum |x_i - M|}{n}$

(vi) Variance (प्रसरण या चरिता) :-→

माध्य के सापेक्ष विचलनों के वर्गों के माध्य को प्रसरण कहते हैं।

इसे σ^2 से प्रदर्शित करते हैं

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

$$= \frac{\sum (x_i^2 - 2x_i(\bar{x}) + \bar{x}^2)}{n}$$

$$= \frac{\sum x_i^2 - 2\bar{x} \sum x_i + \bar{x}^2 \sum 1}{n}$$

$$= \frac{\sum x_i^2 - 2\bar{x}(n\bar{x}) + \bar{x}^2 n}{n}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - (\bar{x})^2$$

(vii) Standard Deviation (मानक विचलन) :-→

प्रसरण के धनात्मक वर्गमूल को मानक विचलन कहते हैं

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - (\bar{x})^2}$$

(viii). Coefficient of Variance (चरिता गुणांक) :-

$$C.V. = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$$

चरिता गुणांक का उपयोग दो निकायों की प्रेक्षणाओं की तुलना में किया जाता है जिस निकाय के लिए C.V.

अधिक होता है। वह अधिक विचलित निकाय तथा मिर लिए C.V. कम होता है वह अधिक स्थिर होता है।

Example :- दिए गए प्रेक्षणाओं (अवर्गीकृत अंकों) के लिए ज्ञात कीजिए।
6, 7, 10, 12, 13, 8, 4, 12

- (i) माध्य (ii) माध्यिका (iii) बहुलक (iv) माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन (v) माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन (vi) प्रक्षरण (vii) मानक विचलन (viii) चरिता गुणांक .

$$\frac{6+7+10+12+13+8+4+12}{8} = \frac{72}{8} = 9$$

माध्यिका

4 6 7 8 10 12 12 13

$$M = \frac{(n)^{+x} + (n+1)^x}{2} = \frac{(4)^{+x} + (5)^x}{2}$$

$$= \frac{8+10}{2} = 9$$

$$\text{Mode} = 3(9) - 2(9)$$

$$27 - 18 = 9$$

माध्य विचलन माध्यम के सापेक्ष = $\frac{\sum (x_i - \bar{x})}{n}$

$$\frac{22-9}{8} = \frac{22}{8} = \frac{11}{4}$$

x	$x_i - \bar{x}$	$ x_i - \bar{x} $
4	-5	5
6	-3	3
7	-2	2
8	-1	1
10	1	1
12	3	3
12	3	3
13	4	4
		<u>22</u>

(v).
$$\frac{\sum (x_i - \bar{x})}{n} = \frac{22}{8} = \frac{11}{4}$$

(vi).
$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

$$= \frac{25+9+4+1+1+9+9+16}{8}$$

$$= \frac{74}{8} = \frac{37}{4} = 9.25,$$

(vii). मानक विचलन (σ) = $\sqrt{9.25}$

$$= 3.04$$

(viii). चरिता गुणांक \rightarrow

$$C.V. = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$$

$$= \frac{3.04}{9} \times 100 = \frac{304}{9}$$

$$= 33.77,$$

(2.) यदि किसी 40 छात्रों की औसत अंक $15/4$ ही तथा

उनमें से प्रथम 10 का औसत $9/2$ ही तो शेष बचे

हुस विद्यार्थियों का औसत ज्ञात किजिए।

Ans:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{40}}{40} = 15/4$$

$$15/4 = \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_{10}) + (x_{11} + \dots + x_{40})}{40}$$

$$150 = \frac{9}{2} \times 10 + (x_{11} + \dots + x_{40})$$

$$150 - 45 = x_{11} + \dots + x_{40}$$

$$x_{11} + \dots + x_{40} = 105$$

$$\text{माध्य} = 105/30 = 7/2$$

(3). यदि संख्याओं 9, 29, 39, ..., 259 का माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन x_6 हो तो 191 का मान ज्ञात करें।

Ans:

$$n = 25$$

$$m.d = \frac{\sum |x_i - m|}{n} \quad \frac{25+1}{2} = 13 \text{ वाँ प्रेक्षण}$$

$$= 139$$

$$26 = \frac{\sum |x_i - 139|}{25}$$

$$26 = \frac{\sum |x_i - 13a|}{25} = 139$$

$$26 \times 25 = \sum |9+34| + |29-139| \dots |259+39|$$

$$= 12|9| + 11|9| \dots 19|+10|+19| \dots 1129|$$

$$26 \times 25 = 2|9|(1+2+3+\dots+12)$$

$$|9| 12 \times 13$$

$$50/12 = |9|$$

$$|9| = 25/6 = 4.166$$

Question 4 :->

यदि सात प्रेक्षकों का माध्य तथा प्रानक्षण क्रमशः 16 हो।
 तथा इनमें से पाँच प्रेक्षक 2, 4, 10, 12, 14 ही तो
 शेष दो प्रेक्षक ज्ञात करें।

Answer :-> माना शेष बचे प्रेक्षक A व B हैं।

$$\bar{x} = \frac{2+4+10+12+14+A+B}{7} = 8$$

$$A+B = 14 \text{ --- (1)}$$

$$\text{पुनः} = \frac{\sum (x_i)^2}{n} - (\bar{x})^2 = 16.$$

$$\frac{4+16+100+144+256+A^2+B^2}{7} - (8)^2 = 16$$

$$\frac{A^2+B^2+520}{7} - 64 = 16$$

$$\frac{A^2+B^2+520}{7} = 80$$

$$A^2+B^2+520 = 80 \times 7$$

$$560 - 520$$

$$A^2 + B^2 = 100$$

①. प ० जै

$$(A+B)^2 - 2AB = 100$$

$$A = 8$$

$$(14)^2 - 2AB = 100$$

$$B = 6$$

$$196 - 2AB = 100$$

$$A = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 4 \times 48}}{2}$$

$$2AB = 96$$

$$\frac{14 \pm 8}{2}$$

$$AB = 48$$

$$A + \frac{48}{A} = 14$$

$$A^2 - 14A + 48 = 0$$

Question 5 :-> 20 छात्रों के एक समूह के लिए माध्य तथा मानक विचलन क्रमशः 40 तथा 15 आते हैं और बाद में यह पाया जाता है कि एक छात्र के लिए स्कोर 50 की जगह गलती से 30 पढ़ लिया जाता है तो सही माध्य तथा मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

Answer :->

$$\bar{x} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{20}}{20} = 40 = \frac{\sum x_i}{20}$$

$$\sum x_i = 800 \quad \text{----- (1)}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - (\bar{x})^2}$$

$$15 = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{20} - (40)^2}$$

$$225 = \frac{\sum x_i^2}{20} - 1600$$

$$\sum x_i^2 = 1825 \times 20$$

$$\sum x_i^2 = 36900 \quad \text{---- (2)}$$

$$\begin{aligned} \sum x_i &= \text{गलत } (\sum x_i) - 30 + 50 \\ &= 800 - 30 + 50 = 820 \end{aligned}$$

सही

$$(2) = \frac{820}{20} = 41$$

सही

$$\sum x_i^2 = \text{गलत } (\sum x_i^2) - (30)^2 + (50)^2$$

$$\begin{aligned} &= 36500 + 1600 \\ &= 38100 \end{aligned}$$

सही

$$(\sigma) = \sqrt{\frac{\text{सही } \sum x_i^2}{n} - (\text{सही})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{38100}{20} - 1681}$$

$$= \sqrt{\frac{3810}{2} - 1681}$$

$$= \sqrt{1905 - 1681}$$

$$= \sqrt{224}$$

Question \rightarrow यदि n प्रेक्षणों x_1, x_2, \dots, x_n के लिए माध्य प्रसरण, नामक विचलन \bar{x}, r^2, v है अब यदि प्रेक्षण x_i को $\frac{ax_i + b}{c}$ से परिवर्तित कर दें तो माध्य प्रसरण तथा मानक विचलन का होने वाले परिवर्तन का विश्लेषण प्राप्त कीजिए।

Answer \rightarrow माध्य $(\bar{x}) = \frac{\sum x_i}{n}$

$$\text{नया माध्य} = \frac{\sum (ax_i + b)}{n}$$

$$= \frac{1}{cn} \sum (ax_i + b)$$

$$= \frac{1}{cn} (a \sum x_i + b \sum 1)$$

$$= \frac{1}{cn} (a \cdot n \bar{x} + bn)$$

$$\text{परिवर्तित माध्य} = \frac{a\bar{x} + b}{c}$$

$$\text{प्रक्षरण } (\sigma^2) = \frac{\sum x_i^2}{n} - (\bar{x})^2$$

$$\text{नया प्रक्षरण} = \frac{\sum \left(a x_i + \frac{b}{c} \right)^2}{n} - \left(\frac{a \bar{x} + \frac{b}{c}}{c} \right)^2$$

$$= \frac{1}{c^2 n} \sum (a^2 x_i^2 + 2ab x_i + b^2) - \frac{(a^2 \bar{x}^2 + 2ab \bar{x} + \frac{b^2}{c^2})}{c^2}$$

$$= \frac{1}{c^2 n} (a^2 \sum x_i^2 + 2ab \sum x_i + b^2 \sum 1) - \frac{a^2 \bar{x}^2 + 2ab \bar{x} + \frac{b^2}{c^2}}{c^2}$$

$$= \frac{1}{c^2} \left[a^2 \left(\frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2 \right) + 2ab \left(\frac{\sum x_i}{n} - \bar{x} \right) + \left(\frac{b^2 \sum 1}{n} - \frac{b^2}{c^2} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{c^2} [a^2 (\sigma^2)]$$

$$\text{परिवर्तित प्रक्षरण} = \frac{a^2 (\sigma^2)}{c^2}$$

$$\text{परिवर्तित स.स} = \left| \frac{a}{c} \right| \sigma$$

Question 7 :-

यदि n प्रेक्षणों $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ के लिए $\sum x_i^2 = 400$

तथा $\sum x_i = 80$ हो तो n का सम्भावित मान है।

- (A) 12 (B) 9 (C) 18 (D) 20

Answer :-

$$\sum x_i = 80 \Rightarrow \bar{x} = 80/n$$

$$\because \sigma = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - (\bar{x})^2} > 0$$

$$= \sqrt{\frac{400}{n} - \left(\frac{80}{n}\right)^2} > 0$$

$$= \frac{400}{n} > \frac{6400}{n^2}$$

$$= \boxed{n > 16}$$

Question:-8 →

निम्नलिखित बारम्बारता वेहन के लिए ज्ञात कीजिए।

x_i	5	15	25	35	45	55
f_i	1	1	3	2	2	1

- (i) माध्य विचलन (ii) माध्यिका (iii) माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन
- (iv) माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन

☺ माध्य \bar{x} =
$$\frac{\sum x_i f_i}{f_i} = \frac{5 \times 1 + 15 \times 1 + 25 \times 3 + 35 \times 2 + 45 \times 2 + 55}{10}$$

=
$$\frac{20 + 75 + 70 + 90 + 55}{10}$$

=
$$310 / 10 = 31$$

☺ माध्यिका (m)

x_i	f_i	(of ^o)
5	1	1
15	1	2
25	3	5
35	2	7
45	2	9
55	1	10

$n = 10$

$$M = \frac{(10/2) \text{ प्रेक्षण} + (10/2 + 1) \text{ प्रेक्षण}}{2}$$

$$= \frac{5\text{वाँ} + 6\text{वाँ}}{2} = \frac{25 + 35}{2} = 30$$

M.D. of mean =

x_i	$ x_i - \bar{x} $
5	+26
15	+16
25	+6
35	4
45	14
55	24

(iii).

x_i	f_i	$x_i - \bar{x}$	$ x_i - \bar{x} $	$f_i x_i - \bar{x} $
5	1	-26	26	26
15	1	-16	16	16
25	3	-6	6	18
35	2	4	4	8
45	2	14	14	28
55	1	24	24	24