



REET



राजस्थान शिक्षक पात्रता परीक्षा

Board of Secondary Education, Rajasthan

Level – II (विज्ञान वर्ग)

भाग – 5

गणित



विषय सूची

गणित की अध्यापन विधि

1. गणित की प्रकृति	1
2. गणित की भाषा	6
3. गणित में मूल्यांकन	7
4. शिक्षण की समस्याएं	12
5. गणितीय शिक्षण की नवीन विधियां	14
6. गणित शिक्षण हेतु सहायक सामग्री	27
7. निदानात्मक एवं उपचासात्मक शिक्षण	29

गणित

1. साधारण ब्याज	33
2. चक्रवृद्धि ब्याज	41
3. समय एवं कार्य	51
4. महत्तम समापर्वतक एवं लघुत्तम समापर्वतक	62
5. संख्या पद्धति	72
6. ऋभाज्य गुणनखंड	84
7. घातांक	87
8. भिन्न संख्याएँ	95
9. दशमलव भिन्न	101
10. सरलीकरण	109
11. अनुपात एवं समानुपात	120
12. श्रृंखला	125
13. समय, दूरी और रेलगाडी	138
14. प्रतिशतता	149
15. लाभ-हानि	164
16. नाव एवं धारा	186
17. सांख्यिकी	193
18. ज्यामितीय	198
19. क्षेत्रमिति आयतन	224
20. साझेदारी	283
21. बीजगणितीय तादात्म्य	291
22. डाटा इन्टरप्रिटेशन	307

Pedagogy Of mathematics

★ गाणित की प्रकृति

- वास्तव में गणित का शाब्दिक अर्थ होता है - 'वह शास्त्र जिसमें गणनाओं की प्रधानता हो।
- अतः हम कह सकते हैं कि गणित - "अंक, अक्षर, चिन्ह आदि संक्षिप्त संकेतों का वह विज्ञान है जिसकी मदद से परिमाण, दिशा एवं स्थान पर बोध होता है।"

कुछ महत्वपूर्ण परिभाषाएँ -

- ① भारतिल, रूच, स्टोन के मतानुसार, " गणित ऐसी अमूर्त व्यवस्था का अध्ययन है जो कि अमूर्त तत्वों से मिलकर बनी है। इन तत्वों को मूर्त रूप में परिभाषित किया गया है।"
- ② बर्ट्रैंड रसेल के अनुसार, " गणित एक ऐसा विषय है जिसमें हम यह भी नहीं जानते कि हम किसके बारे में बात कर रहे हैं और न ही यह जान पाते हैं कि हम जो कह रहे हैं वह सत्य है।"
- ③ गैलीलियो के अनुसार - " गणित वह भाषा है जिसमें परमेश्वर ने सम्पूर्ण जगत या ब्रह्माण्ड को लिख दिया है।"
- ④ लॉक के अनुसार - " गणित वह मार्ग है जिसके द्वारा बच्चों के मन या मास्तिष्क में तर्क करने की आदत स्थापित होती है।"

- 5) हॉगबैन के अनुसार - 'गणित सभ्यता और संस्कृति का दर्पण है'
- 6) रोजन बैकन के अनुसार - "गणित सभी विज्ञानों का सिंह द्वार एवं कुंजी है।"
- 7) ऑक्सफोर्ड डिक्शनरी - गणित मापन, मात्रा तथा परिमाण का विज्ञान है।
- 8) प्लैटी के अनुसार - गणित एक ऐसा विषय है जो मानसिक शक्तियों को प्रशिक्षित करने का अवसर प्रदान करता है। एक सुषुप्त आत्मा में चेतना एवं नवीन जागृति उत्पन्न करने का कौशल गणित ही प्रदान कर सकता है।
- 9) डटन के अनुसार - गणित शिक्षण का वास्तविक उद्देश्य ज्ञान प्राप्त करना नहीं है वरन् शक्ति प्रदान करना है।
- 10) डेविड व्हीसर - अधिक गणित जानने की अपेक्षा यह जानना अधिक उपयोगी है कि गणितीयकरण कैसे किया जाए।

गणित की प्रकृति -

गणित की प्रकृति को निम्न बिन्दुओं द्वारा भलीभाँति समझा जा सकता है -

- 1) गणित में संख्याएँ, स्थान, दिशा एवं मापन अथवा माप लेने का ज्ञान प्राप्त किया जाता है।

- ② गणित के ज्ञान का आधार हमारी ज्ञानेन्द्रियाँ हैं।
- ③ गणित के नियम, सिद्धान्त, सूत्र सभी स्थानों पर एक समान होते हैं जिससे उनकी सत्यता की जाँच किसी भी समथ एवं स्थान पर की जा सकती है।
- ④ गणित के अध्ययन से आगमन, निगमन एवं सामान्यीकरण की योग्यता विकसित होती है।
- ⑤ गणित के ज्ञान से बालकों में प्रशांसात्मक दृष्टिकोण एवं भावना का विकास होता है।
- ⑥ इससे बालकों में स्वस्थ एवं वैज्ञानिक दृष्टिकोण विकसित होता है।
- ⑦ गणित के ज्ञान का उपयोग विज्ञान की विभिन्न शाखाओं तथा भौतिकी, रसायन विज्ञान, जीव विज्ञान एवं अन्य विषयों के अध्ययन में किया जाता है।
- ⑧ गणित विज्ञान की विभिन्न शाखाओं के अध्ययन में मददगार ही नहीं, बल्कि उनकी प्रगति एवं संगठन की आधारशिला है।
- ⑨ इसके अध्ययन से प्रत्येक ज्ञान एवं सूचना स्पष्ट होती है और उसका एक संभावित उत्तर निश्चित हो जाता है।

गणित का क्षेत्र

→ इसके आधारीक गणित एवं प्रयुक्त गणित दो पक्ष हैं।

(अ) आधारीक गणित - इसकी मुख्य धाराएँ इस तरह हैं।

- (i) समुच्चय सिद्धान्त
- (ii) बीजगणित
- (iii) ज्यामिति
- (iv) विश्लेषण
- (v) संचय विन्यास विज्ञान एवं संख्या पद्धति
- (vi) सांस्थिति विज्ञान

(ब) प्रयुक्त गणित - इसकी निम्न उपशाखाएँ हैं।

- (i) परिकलनी विज्ञान
- (ii) सांख्यिकी

भौतिक सिद्धान्तों गणितीय पक्ष -

- (i) कणों तथा पद्धतियों की यांत्रिकी (ix) अवकलन विधीय
- (ii) तरलों की थान्तिकी
- (iii) ठोस की यांत्रिकी
- (iv) सांख्यिकी यांत्रिकी
- (v) विद्युतचुंबकीय सिद्धान्त
- (vi) सापेक्षिकता सिद्धान्त
- (vii) रीमैनिशन ज्यामिति
- (viii) क्वांटम यांत्रिकी

गांधी का महत्व —

— इसकी उपयोगिता जीवन के विभिन्न पक्षों में निम्न तरह हो सकती है —

- (i) विचार व्यक्त करने में महत्व
 - (ii) दैनिक जीवन में महत्व
 - (iii) आर्थिक सामाजिक प्रगति में महत्व
 - (iv) बौद्धिक प्रवीणता
 - (v) तर्क संगत, क्रमबद्ध एवं व्यावहारिक गुणों का विकास
- गांधी को पाठ्यक्रम में विशेष स्थान देने के कारण—
1. यह विज्ञान विषयों का आधार है।
 2. गांधी का मानव जीवन से घनिष्ठ संबंध है।
 3. गांधी बच्चों में तार्किक दृष्टिकोण पैदा करता है।
 4. गांधी एक विशेष तरह से सोचने का दृष्टिकोण प्रदान करता है।
 5. गांधी एक यथार्थ विज्ञान है।
 6. गांधी मानसिक शक्ति को विकसित करने का अवसर प्रदान करता है।
 7. गांधी का ज्ञान चरित निर्माण तथा नैतिकता के विकास में मददगार है।
 8. गांधी की भाषा सार्वभौमिक होती है।
 9. गांधी का ज्ञान अन्य विषयों के अध्ययन में मददगार होता है।
 10. गांधी समूह (समुच्चय) एवं संरचनाओं का अध्ययन है।

गणित शिक्षण के मूल्य-

- | | |
|--------------------------|---|
| ① बौद्धिक मूल्य | ⑦ कलात्मक मूल्य |
| ② प्रयोगात्मक मूल्य | ⑧ जीविकीपार्जन सम्बन्धी मूल्य |
| ③ अनुशासन सम्बन्धी मूल्य | ⑨ मनोवैज्ञानिक मूल्य |
| ④ नैतिक मूल्य | ⑩ अन्तर्राष्ट्रीय मूल्य |
| ⑤ सामाजिक मूल्य | ⑪ वैज्ञानिक दृष्टि कोण से सम्बन्धित मूल्य |
| ⑥ सांस्कृतिक मूल्य | |

★ गणित की भाषा

- ⇒ गणितीय भाषा किसी वस्तु और नाम में अन्तर करती है जैसे - संख्या और संख्यांक ; भिन्न और भिन्नात्मक संख्याएँ ।
 - ⇒ कुछ साधारण भाषा के शब्दों का प्रयोग परिभाषित पदों के रूप में कई बार भिन्न सन्दर्भ में किया जाता है जैसे - शब्द 'मूल' का प्रयोग समीकरण के मूल और वर्गमूल, घनमूल आदि में होता है।
 - ⇒ संक्षेपण का प्रयोग करते हैं जैसे - ग्राम के लिये gm का प्रयोग सही नहीं है।
 - ⇒ किसी एक विचार को अनेक प्रकार से नामांकित या व्यक्त कर सकते हैं जैसे कि योग को 'जोड़िए', 'मान वाला जोड़िए', 'कुल कितने'।
 - ⇒ अन्य भाषाओं की तरह गणित की भाषा का भी अपना व्याकरण है। इसमें भी संज्ञा, क्रिया और विशेषण आदि पाए जाते हैं।
- भाषा के गुण - शुद्धता, यथार्थता और सक्षमता।

साधारण व्याज

SIMPLE INTEREST

साधारण व्याज (SIMPLE INTEREST)

जब कोई व्यक्ति किसी शाहूकार अथवा बैंक से रुपया उधार लेता है। तो दूसरे का धन उपयोग करने के लिये वातिरिक्त धन देना पड़ता है। इस वातिरिक्त धन को व्याज कहते हैं।

उधार लिये गये धन को मूलधन (मू०) कहते हैं।

मूलधन तथा व्याज के योगफल को मिश्रधन कहते हैं।

साधारण व्याज \Rightarrow जो व्याज केवल मूलधन पर एक निश्चित अवधि के लिये एक ही दर पर लगाया जाता है। उसे साधारण व्याज कहते हैं।

सूत्र

$$\text{(i) साधारण व्याज} = \frac{\text{मू०} \times \text{दर} \times \text{समय}}{100}$$

$$\text{(ii) मूलधन} = \frac{100 \times \text{साधारण व्याज}}{\text{दर} \times \text{समय}}$$

$$\text{(iii) दर} = \frac{100 \times \text{साधारण व्याज}}{\text{मूलधन} \times \text{समय}}$$

$$\text{(iv) समय} = \frac{100 \times \text{साधारण व्याज}}{\text{मूलधन} \times \text{दर}}$$

(v) माना कोई धन T वर्ष बाद देय है तथा व्याज की दर R% वार्षिक है तब \rightarrow

$$\text{नन्वाय धन} = \frac{\text{देयधन} \times 100}{(100) + (R \times T)}$$

Q.1. ₹ 6000 पर 6% वार्षिक दर से 8 माह का साधारण व्याज तथा मिश्रधन ज्ञात कीजिये ?

दत्त - मूलधन = ₹ 6000 दर = 6% समय = $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ वर्ष

$$\begin{aligned} \text{साधारण व्याज} &= ₹ \frac{6000 \times 6 \times \frac{2}{3}}{100} \\ &= ₹ 240 \end{aligned}$$

$$\text{मिश्रधन} = ₹ (6000 + 240) = ₹ 6240$$

Q.2. ₹ 2500 का 5% वार्षिक दर पर 219 दिनों का साधारण व्याज कितना होगा ?

दत्त → मूलधन = ₹ 2500 दर = 5% वार्षिक समय = $\frac{219}{365} = \frac{3}{5}$ वर्ष

$$\text{साधारण व्याज} = ₹ \left(2500 \times \frac{5}{100} \times \frac{3}{5} \right) = ₹ 75$$

Ans = ₹ 75

Q.3. ₹ 3200 पर 4 अप्रैल 2012 से 16 जून 2012 तक का 5% वार्षिक दर पर साधारण व्याज कितना होगा ?

note - जिस दिन धन जमा करते हैं वह दिन व्याज कैलु नही गिना जाता. परन्तु जिस दिन धन निकाला जाता है वह दिन व्याज कैलु गिना जायेगा -

दत्त → मूलधन = ₹ 3200 दर = 5% वार्षिक

$$\begin{array}{ccc} \text{समय} = & \text{अप्रैल} & \text{मई} & \text{जून} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & (26) & (31) & (16) \end{array} \text{ दिन} = 73 \text{ दिन} = \frac{73}{365} = \frac{1}{5} \text{ वर्ष}$$

$$\text{साधारण व्याज} = ₹ \left(3200 \times \frac{5}{100} \times \frac{1}{5} \right) = ₹ 32$$

Q.4. किसी धन का साधारण व्याज की 0.10 वार्षिक दर से 3 वर्ष का मिश्रधन ₹6944 है वह धन ज्ञात कीजिये ?

$$\text{दल} = \text{माना मूलधन} = ₹x \text{ तब}$$

$$\text{साधारण व्याज} = ₹ \left(x \times \frac{10}{100} \times 3 \right) = ₹ \frac{6x}{25}$$

$$\therefore \text{मिश्रधन} = ₹ \left(x + \frac{6x}{25} \right) = ₹ \frac{31x}{25}$$

$$\therefore \frac{31x}{25} = 6944 \Rightarrow x = \frac{6944 \times 25}{31} = 5600$$

अतः अभीष्ट धन = ₹ 5600

Q.5. किसी धन का साधारण व्याज से 2 वर्ष का मिश्रधन ₹8700 तथा $3\frac{1}{2}$ वर्ष का मिश्रधन = ₹9600 है मूलधन तथा व्याज की दर ज्ञात करें ?

$$\frac{3}{2} \text{ वर्ष का व्याज} = ₹ (9600 - 8700) = ₹ 900$$

$$2 \text{ वर्ष का व्याज} = ₹ \left(900 \times \frac{2}{3} \times 2 \right) = ₹ 1200$$

$$\therefore \text{मूलधन} = ₹ (8700 - 1200) = ₹ 7500$$

$$\therefore \text{दर} = \left(\frac{100 \times 1200}{7500 \times 2} \right) \% \text{ वार्षिक} = 8\% \text{ वार्षिक}$$

अतः मूलधन = ₹ 7500 तथा दर = 8% वार्षिक

⑥ साधारण ब्याज की दर से कौन से धन 8 वर्ष में दोगुना हो जायेगा ?

दल - माना मूलधन = ₹ x तथा साधारण ब्याज = x
 समय = 8 वर्ष

$$\therefore \text{दर} = \left(\frac{100 \times x}{x \times 8} \right) \% \text{ वार्षिक} = 12.5 \% \text{ वार्षिक}$$

$\text{Ans} = 12.5 \% \text{ वार्षिक}$

⑦ एक व्यापारी ने ₹ 45000 का ऋण दो बैंकों से लिया। एक ऋण के लिये 8% वार्षिक दिया तथा दूसरे ऋण के लिये 12% वार्षिक। यदि एक वर्ष का कुल ब्याज ₹ 4440 हो, तो 8% की दर पर कितना धन लिया गया ?

दल \Rightarrow माना 8% की दर पर लिया गया धन = x
 तब 12% की दर पर लिया गया धन = ₹ $(45000 - x)$

$$\therefore \left(x \times \frac{8}{100} \times 1 \right) + \left\{ (45000 - x) \times \frac{12}{100} \times 1 \right\} = 4440$$

$$\Rightarrow \frac{2x}{25} + \frac{3(45000 - x)}{25} = 4440$$

$$\Rightarrow 2x + 135000 - 3x = 111000$$

$$\Rightarrow x = (135000 - 111000) = 24000$$

$\text{अतः 8\% की दर पर लिया गया धन} = ₹ 24000$

- ⑧ कोई धन किसी निश्चित दर पर 2 वर्ष के लिये साधारण व्याज की दर पर दिया गया. यदि व्याज की दर 3% अधिक होती तो ₹ 100 व्याज अधिक मिलता मूलधन ज्ञात कीजिये ?

हल- माना मूलधन = ₹x तथा दर = R% वार्षिक, तब -

$$\Rightarrow \left\{ \frac{x(R+3) \times 2}{100} \right\} - \left\{ \frac{xR \times 2}{100} \right\} = 100$$

$$\Rightarrow \left\{ \frac{xR \times 2}{100} \right\} + \left\{ \frac{x \times 3 \times 2}{100} \right\} - \left\{ \frac{xR \times 2}{100} \right\} = 100$$

$$\Rightarrow \frac{3x}{50} = 100 \Rightarrow x = \frac{100 \times 50}{3} = 1000$$

अतः मूलधन = ₹1000

- ⑨ 3 वर्ष बाद दिये ₹ 1092 वराबर वार्षिक किस्तों में चुकाना है। यदि साधारण व्याज की दर 12% वार्षिक है, तो प्रत्येक किस्त का मान ज्ञात कीजिये ?

हल- माना वार्षिक किस्त का मान = ₹x तब,

₹x का 2 वर्ष का मिश्रधन + ₹x का 1 वर्ष का मिश्रधन + ₹x = 1092

$$\Rightarrow \left(x + \frac{x \times 2 \times 12}{100} \right) + \left(x + \frac{x \times 1 \times 12}{100} \right) + x = 1092$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{6x}{25} \right) + \left(x + \frac{3x}{25} \right) + x = 1092$$

$$\Rightarrow \frac{31x}{25} + \frac{20x}{25} + x = 1092$$

$$\Rightarrow (31x + 20x + 25x) = 1092 \times 25$$

$$\Rightarrow 84x = 1092 \times 25$$

$$\Rightarrow x = \frac{1092 \times 25}{84} = 325$$

अतः प्रत्येक निस्त का मान = 325

अभ्यास के लिये प्रश्न

① ₹ 900 की राशि पर 10% वार्षिक दर से 5 वर्ष के अन्त में कितना साधारण व्याज अकिते होगा ?

ans = ₹ 009.20

② एक व्यक्ति ने ₹ 0500 साधारण व्याज पर 9% वार्षिक दर से उधार लिये. 2½ वर्ष के अन्त में उसे कितना धन वापिस देना होगा ?

ans = ₹ 0547.50

③ ₹ 3600 की राशि को दो भागों में इस प्रकार विभक्त करें कि पहले भाग पर 5% वार्षिक दर से 3 वर्ष का साधारण व्याज, दूसरे भाग पर 6¼% वार्षिक दर से 4 वर्ष के साधारण व्याज के बराबर हो, दो राशियों के अंश ?

ans = ₹ 2250 तथा ₹ 1350

④ X तथा Y को दो समान राशियों 7.5% तथा वार्षिक दर से 4 वर्ष या 5 वर्ष के लिये उधार दी गई यदि इनके द्वारा किये गये व्याज में ₹ 150 का अन्तर हो तो, प्रत्येक दी गयी राशि कितनी है।

ans = ₹ 2000

5) ₹ 2500 पर 6 वर्ष में उपचित साधारण व्याज ₹ 1075 हैं। इसी दर पर इतने की समय के लिये ₹ 6875 पर कितना साधारण व्याज उपचित होगा ?

~~ans = ₹ 5100~~
ans = ₹ 5156.25

6) साधारण व्याज की किस वार्षिक दर पर किसी धन का 10 वर्ष का व्याज उस धन का $\frac{2}{5}$ होगा ?

ans = 4%

7) कितने समय में ₹ 10,000 का साधारण व्याज 6% वार्षिक दर से ₹ 450 हो जायेगा ?

ans = 9 माह

8) कितने वर्षों में 12% वार्षिक दर से ₹ 3000 का साधारण व्याज ₹ 1000 हो जायेगा ?

ans = 3 वर्ष

9) कोई धन साधारण व्याज की एक विशेष दर पर 2 वर्ष के लिये उधार दिया जाता है। यदि व्याज की दर 1% वार्षिक अधिक होती है तो इससे ₹ 240 अधिक साय होती है। यह धन कितना है ?

ans = ₹ 12000

10) एक व्यक्ति क्रमशः 6 वर्ष 10 वर्ष तथा 12 वर्ष के लिये साधारण व्याज की क्रमशः 10%, 12% तथा 15% वार्षिक दर पर धन लगाता है। यदि 3 वर्ष बाद प्रत्येक स्कीम के बराबर व्याज मिले, तो इन मूलधनों का अनुपात क्या होगा ?

ans = 6 : 3 : 2