



राजस्थान—पटवार

राजस्थान कर्मचारी चयन बोर्ड

गणित एवं कम्प्यूटर अध्ययन

विषय सूची

1. औसत	1
2. सरलीकरण	11
3. प्रतिशत	32
4. अनुपात, भिन्न , एकैकी नियम पर आधारित अध्याय	
(a) अनुपात – समानुपात	47
(b) कार्य और समय	63
(c) नल एवं टंकी	76
(d) मिश्रण	81
(e) साझा	97
(f) समय एवं दूरी	105
5. साधारण एवं चक्रवृद्धि ब्याज	123
6. लाभ, हानि	139
7. बट्टा	153
8. क्षेत्रफल एवं आयतन	160
● कम्प्यूटर अध्ययन	193

AVERAGE (औसत)

औसत :- एक ऐसी संख्या जो किसी दिए गए संख्याओं की श्रृंखला के केंद्रीय संख्या / मान को व्यक्त करे।

$$\text{औसत} = \frac{\text{राशियों का योग}}{\text{राशियों की कुल संख्या}}$$

* औसत को मध्यमान भी कहा जाता है।

उदाहरण-1 संख्याओं 33, 49 और 57 का औसत ज्ञात कीजिए।

हल :- औसत = $\frac{33+49+57}{3} = \frac{139}{3}$

$$= 46.33$$

औसत ज्ञात करने की बाधुनिक विधि :-

उदाहरण-2 दी गई संख्याओं का औसत ज्ञात कीजिए।
237, 258, 187, 322, 158

हल :- परम्परागत विधि

$$= \frac{237+258+187+322+158}{5}$$

$$= \frac{1162}{5}$$

$$= 232.4$$

परीक्षा विधि

$$237, 258, 187, 322, 158$$

माना की औसत = 200 है।

$$\begin{array}{ccccc}
 237 & 258 & 187 & 322 & 158 \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 +37 & +58 & -13 & +122 & -42
 \end{array}$$

$$200 + \frac{162}{5} = 232.4$$

सहायकार विन्दु :-

(a) संख्याओं 237, 258, 187, 322, 158 के निकटवर्ती किसी संख्या की औसत मान लेते हैं।

$$\text{माना वह संख्या} = 200$$

(b) अब दी गई संख्याओं में से 200 को घटाते हैं।

$$\text{अतः } +32, +58, -13, +122, -42$$

$$\text{परिणाम} = 162$$

(c) परिणाम को संख्याओं की कुल संख्या (5) से भाग देते हैं।

$$= \frac{162}{5} = 32.4$$

(d) अब माने गये औसत में 32.4 को जोड़ देंगे। इस प्रकार प्राप्त परिणाम ही संख्याओं का औसत है।

$$= 200 + 32.4$$

$$= 232.4$$

क्रमागत प्राकृतिक संख्याओं का औसत / क्रमागत सम संख्याओं का औसत / क्रमागत विषम संख्याओं का औसत ज्ञात करना जिनके मध्य अंतर समान हो:-

$$= \frac{\text{प्रथम संख्या} + \text{अंतिम संख्या}}{2}$$

उदाहरण-3 3 और 149 के मध्य प्राकृत संख्याओं का औसत ज्ञात कीजिए ।

हल:- 3 और 149 के मध्य स्थित प्राकृत संख्याएँ

$$4, 5, \dots, 148$$

$$= \frac{4 + 148}{2} = 76$$

उदाहरण-4 11 से 117 तक की सभी सम संख्याओं का औसत ज्ञात कीजिए।

हल:- 12, 14, ..., 114, 116

$$= \frac{12 + 116}{2} = 64$$

उदाहरण-5 8 और 34 के मध्य स्थित सभी विषम संख्याओं का औसत ज्ञात कीजिए।

हल:- 9, 11, ..., 31, 33

$$= \frac{9 + 33}{2}$$

$$= 21$$

उदाहरण-6 दी गई श्रृंखला का औसत ज्ञात कीजिए।

3, 7, 11, --- 91, 95, 99

हलः - 3, 7, 11 --- 91, 95, 99
 4 4 4 4

∴ श्रृंखला के बंकी के मध्य अंतर हमेशा समान
 (d.e = 4) रहेगा।

$$= \frac{3+99}{2} = \frac{102}{2} = 51$$

प्रथम n प्राकृत संख्याओं के वर्गों का औसत = $\frac{(n+1)(2n+1)}{6}$

उदाहरण-7 1 से 16 तक की संख्याओं के वर्गों का औसत ज्ञात कीजिए।

हलः -
$$= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(16+1)(2 \times 16+1)}{6} = \frac{17 \times 33}{6}$$

$$\frac{187}{2} = 93.5$$

प्रथम n प्राकृत संख्याओं के घनों का औसत = $\frac{n(n+1)^2}{4}$

उदाहरण-8 1 से 12 तक की संख्याओं के घनों का औसत ज्ञात कीजिए।

हलः -
$$= \frac{12 \times (12+1)^2}{4} = 3 \times 169 = 507$$

Solved Example

संख्याओं पर आधारित प्रश्न:-

प्र. 1. 3 से 147 तक की संख्याओं का औसत ज्ञात कीजिए।

हल: = प्रथम संख्या + अंतिम संख्या

$$= \frac{3+147}{2} \quad [\because 3, 4, 5 \dots \dots \dots 146, 147]$$

$$= 75 \text{ अंश}$$

प्र. 2. 4 के प्रथम 15 गुणकों का औसत ज्ञात कीजिए।

हल: 4, 8, 12 - - - - - 15x4 = 60

$$= \frac{\text{प्रथम संख्या} + \text{अंतिम संख्या}}{2} = \frac{4+60}{2}$$

$$= 32 \text{ अंश}$$

प्र. 3. यदि "m" संख्याओं का औसत n^2 तथा 'n' संख्याओं का औसत m^2 हो तो $(m+n)$ संख्याओं का औसत ज्ञात कीजिए।

हल: m संख्याओं का औसत = $\frac{m \text{ संख्याओं का योग}}{m}$

$n^2 = \frac{m \text{ संख्याओं का योग}}{m}$

योग = $n^2 m$

n संख्याओं का औसत = $\frac{n \text{ संख्याओं का योग}}{n}$

$m^2 = \frac{n \text{ संख्याओं का योग}}{n} \Rightarrow \text{योग} = n m^2$

$(m+n)$ संख्याओं का औसत = $\frac{m n^2 + n m^2}{m+n} = \frac{mn(m+n)}{(m+n)} = mn$

प्र. 4. तीन प्राकृत संख्याएँ इस प्रकार दी गई हैं कि दूसरी संख्या पहली संख्या की दोगुनी तथा तीसरी संख्या दूसरी संख्या की तीगुनी है। तीनों संख्याओं का औसत 147 है। सबसे बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए।

हल: (1) x (2) 2x (3) 6x

दोगुनी
तीगुनी

$$\frac{x+2x+6x}{3} = 147$$

$$\frac{9x}{3} = 147$$

$$\boxed{x = 49}$$

सबसे बड़ी संख्या = 49×6

= 294 अंश

प्र. 5. 9 संख्याओं का औसत 27 है। उनमें प्रथम 4 संख्याओं का औसत 23 तथा अंतिम 4 संख्याओं का औसत 31 है। मध्य संख्या ज्ञात कीजिए।

हल:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
 \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & & & \downarrow & & & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\
 23 \times 4 & & & & x & & & & 31 \times 4
 \end{array}$$

$$23 \times 4 + x + 31 \times 4 = 27 \times 9$$

$$92 + x + 124 = 243$$

$$\boxed{x = 27} \text{ Ans}$$

• प्रथम 4 संख्याओं का योग = $23 \times 4 = 92$

• अंतिम 4 संख्याओं का योग = $31 \times 4 = 124$

• मध्य संख्या = x

• सभी संख्याओं का योग = $9 \times 27 = 243$

संयुक्त औसत

प्र. 6. कक्षा P, Q, R का औसत प्राप्तांक क्रमशः 83, 76 तथा 85 है। और इन कक्षाओं में क्रमशः 27, 36 तथा 45 विद्यार्थी हैं। तो कक्षा P, Q, R का संयुक्त औसत ज्ञात कीजिए।

हल:

	P	Q	R
avg:	83	76	85
अनुपात	27	36	45

$$3 : 4 : 5$$

$$3 : 4 : 5$$

माना औसत = 80

अथ	+3	-4	+5
	$\times 3$	$\times 4$	$\times 5$

$$9 \quad -16 \quad 25$$

$$9 - 16 + 25 = 18$$

$$= \frac{18}{12} = 1.5$$

$$= 80 + 1.5 = 81.5 \text{ औसत}$$

Steps :-

(i) माना कि संख्याओं 83, 76 तथा 85 का औसत 80 है

(ii) अंतर

$$83 - 80 = +3$$

$$76 - 80 = -4$$

$$85 - 80 = 5$$

(iii) संख्याओं के अनुपात से गुणा

$$= (+3 \times 3) + (-4 \times 4) + (5 \times 5)$$

$$= 9 - 16 + 25 = 18$$

(iv) $\frac{18}{(3+4+5)}$ (विद्यार्थियों का अनुपात)

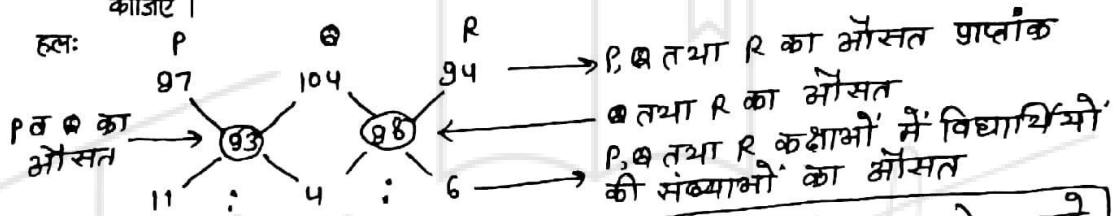
(v) इसको माने जमे औसत में जोड़ दो।

$$= 80 + 1.5 = 81.5 \text{ (औसत)}$$

प्र. 7. 23 आदमियों का औसत 90 है तथा 27 महिलाओं का औसत 77 है। पूरे ग्रुप का औसत क्या होगा
हल:

$$\begin{aligned}
 \text{संयुक्त औसत} &= \frac{n_1w_1 + n_2w_2 + \dots}{n_1 + n_2 + n_3 + \dots} \\
 &= \frac{23 \times 90 + 27 \times 77}{23 + 27} \\
 &= \frac{2070 + 2079}{50} = \frac{4149}{50} = 82.98
 \end{aligned}$$

प्र. 8. कक्षा P, Q तथा R का औसत प्राप्तांक क्रमशः 97, 104 तथा 934 है। P तथा Q का औसत प्राप्तांक 93 तथा Q तथा R का औसत प्राप्तांक 98 है। सभी कक्षाओं का संयुक्त औसत ज्ञात कीजिए।



माना कि औसत = 100

P	Q	R
97	104	94
-3	+4	-6
x11	x4	x6
-33	+16	-36

$$\Rightarrow \frac{-53}{11+4+6} = \frac{-53}{21} = -2.5$$

उचित औसत = $100 - 2.5 = 97.5$

Allocation विधि का प्रयोग करके

ग्रुप में नये व्यक्ति के शामिल होने/ बाहर होने तथा एक के बदले दुसरे के जाने पर आधारित प्रश्न -

प्र. 9. 30 विद्यार्थियों की औसत आयु 9 वर्ष है, यदि उसमें अध्यापक की आयु को भी शामिल कर लिया जाये तो औसत 10 वर्ष हो जाता है। अध्यापक की आयु ज्ञात करो।

हल: मौलिक विधि :-

\Rightarrow सभी विद्यार्थियों की आयु का योग + अध्यापक की आयु = नया औसत

$$\Rightarrow \frac{30 \times 9 + x \times 1}{31} = 10$$

$$\Rightarrow 270 + x = 310$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 40} \text{ (वर्ष)}$$

Ans

तार्किक विधि (Advance Method) :-

सदस्य औसत

$$\begin{array}{r}
 30 \times 9 \\
 + 1 \times x \\
 \hline
 31 \times 10
 \end{array}$$

अध्यापक की आयु = $9 \times 1 + 31 \times 1$

$$= 40 \text{ वर्ष}$$

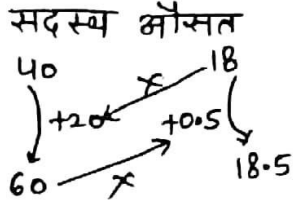
Ans

Steps :-

अध्यापक की आयु = (विद्यार्थियों का औसत x शामिल हुए व्यक्तियों की संख्या + कुल सदस्य x औसत में तर्क)

प्र. 10. स्टाफ के 40 सदस्यों की औसत उम्र 18 वर्ष है। यदि 20 नये सदस्य कैंडिडेट बने तब औसत उम्र 6 सालों की वृद्धि हो गई। नये सदस्यों का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल:



नये सदस्यों की उम्र का योगफल

$$= 18 \times 20 + 60 \times 0.5$$

$$= 360 + 30$$

$$= \underline{\underline{390 \text{ वर्ष}}}$$

परम्परागत विधि:-

$$= \frac{40 \times 18 + \text{सदस्यों की भाग्य का योग}}{60} = 18.5$$

$$= 720 + x = 1110$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x = 390}}$$

यदि नये सदस्यों की औसत उम्र पूछा गया होता तो

$$= \frac{390}{20} = 19.5 \text{ वर्ष}$$

प्र. 11. 25 सदस्यों का औसत उम्र 18.75 है, यदि अने से एक व्यक्ति बाहर हो गया तो औसत उम्र 16 बन जाता है, बाहर हुए सदस्य की संख्या ज्ञात करो।

हल:

तार्किक विधि:-

$$\begin{array}{ccc} 25 & & 18.75 \\ & \searrow & \nearrow \\ & -1 & -2.75 \\ & \nearrow & \searrow \\ 24 & & 16 \end{array}$$

$$= 24 \times 2.75 + 18.75 \times 1$$

$$= 84.75 \text{ Ans}$$

परम्परागत विधि:-

$$25 \times 18.75 - 24 \times 16$$

$$= 468.75 - 384$$

$$= 84.75 \text{ Ans}$$

प्र. 12. 40 लोगों के एक समूह का औसत वजन 0.75kg से बढ़ जाता है जब एक 50kg वाले एक व्यक्ति के स्थान पर एक अन्य व्यक्ति आ जाता है। नये व्यक्ति का वजन ज्ञात कीजिए।

हल: जब औसत में वृद्धि हो:-

नये व्यक्ति का वजन = पुराने व्यक्ति का वजन + औसत \times औसत में वृद्धि

$$= 50 + 40 \times 0.75$$

$$= 50 + 30$$

$$= \underline{\underline{80 \text{ kg}}}$$

- यदि एक व्यक्ति, दूसरे व्यक्ति के स्थान पर आ जाये
- नया व्यक्ति = पुराना व्यक्ति + पुराना औसत \times औसत में वृद्धि

- जब एक व्यक्ति को बढ़ा जाया हो और भौसत में कमी हो तो उपरोक्त सूत्र को $(-)$ चिन्ह के साथ प्रयोग किया जाता है।
- जब व्यक्तियों की मढ़ला बढ़ली होने पर भी भौसत समान रहे।

अशुद्ध पढ़ने से संबंधित प्रश्न :-

प्र. 13.25 प्रेक्षकों का औसत 13 है, बाद में यह पाया गया कि गलत पढ़ लेने के कारण 73 के स्थान पर 48 प्रविष्ट कर दिया गया है। सही औसत ज्ञात कीजिए।

हल: Ist Method :-

$$25 \text{ प्रेक्षकों का योग} = 25 \times 13$$

$$= 325$$

$$\text{सही योग} = 325 - 48 + 73$$

$$= 350$$

$$\text{सही औसत} = \frac{350}{25} = 14$$

Ans

IInd Method :-

$$\text{नया औसत} = \text{पुराना औसत} + \frac{\text{अंतर}}{\text{कुल संख्या}}$$

$$= 13 + \frac{73 - 48}{25}$$

$$= 13 + 1 = 14$$

Ans

प्र. 14.14 विद्यार्थियों का औसत प्राप्तांक 71 ज्ञात किया गया, परंतु बाद में दो विद्यार्थियों के अंको में त्रुटि पाई गई। जैसे कि 56 के स्थान पर 42 तथा 32 के स्थान पर 74। सही औसत ज्ञात कीजिए।

हल:

$$= 71 + \frac{56 + 32 - 42 - 74}{14}$$

$$= 71 - \frac{28}{14}$$

$$= 71 - 2$$

$$= \underline{\underline{69}} \text{ Ans}$$

विविध प्रश्न:-

प्र. 15. 3 वर्ष पहले 4 सदस्यीय एक परिवार की औसत आय 21 वर्ष थी। एक बच्चे का जन्म हुआ परन्तु परिवार की औसत आय अब भी पहले के समान है। तो बच्चे की वर्तमान आय ज्ञात करें।

हल:

$$3 \text{ वर्ष पहले औसत आय} = 21$$

$$\text{उम्र का योग} = 21 \times 4 = 84$$

$$\text{वर्तमान उम्र का योग} = 84 + 3 \times 4 = 96$$

$$\begin{aligned} 5 \text{ सदस्यों की वर्तमान आय का योग} &= \text{नया औसत} \times 5 \\ &= 21 \times 5 = 105 \end{aligned}$$

$$\text{बच्चे की आय} = 105 - 96 = \underline{9 \text{ वर्ष}} \text{ Ans}$$

प्र. 16. किती बल्लेबाज के 10 मैचों का औसत 32 है, उसको अपने रन को औसतन 4 रन बढ़ाने के लिए कितने रन बनाने चाहिए।

हल: मतः 11 मैचों के बाद औसत होगा = 36

$$= 11 \times 36 - 10 \times 32$$

$$= 396 - 320$$

$$= \underline{76 \text{ Ans}}$$

प्र. 17. एक बल्लेबाज 17 वें मैच में 87 रन बनाता है, इससे उसका औसत 3 से बढ़ जाता है। 17 वें मैच के बाद उसका औसत ज्ञात करें।

हल: माना कि 17 वें मैच के बाद उसका औसत = x

तब 17 वें मैच से पहले उसका औसत = $x - 3$

$$\text{अतः } 16(x-3) + 87 = 17x$$

$$x = \underline{39 \text{ Ans}}$$

प्र. 18. 25 पारियों के बाद एक बल्लेबाज का औसत 62 रन प्रति पारी था। यदि 26वीं पारी के बाद उसका औसत 1 रन से बढ़ गया, तो 26वीं पारी में उसका स्कोर क्या था ?

हल:

Ist Method

$$\begin{aligned} 26 \text{ वीं पारी में रन} &= \frac{\text{कुल रन} - 25 \text{ पारियों के बाद कुल रन}}{\text{कुल रन}} \\ &= \frac{26 \times (62 + 1) - 25 \times 62}{26} \\ &= \frac{1638 - 1550}{26} \\ &= \underline{88 \text{ Ans}} \end{aligned}$$

IInd Method

$$\begin{aligned} 26 \text{ वीं पारी के रन} &= \text{नया औसत} \\ &+ [\text{पुरानी पारियों} \times \text{औसत में बदलाव}] \\ &= 63 + (25 \times 1) \\ &= \underline{88 \text{ Ans}} \end{aligned}$$

SIMPLIFICATION (I j y h d j . k)

मिन्न ⇒

$$1 = 100\%$$

$$\frac{1}{11} = 9.09\%$$

$$\frac{3}{8} = 37.5\%$$

$$\frac{1}{2} = 50\%$$

$$\frac{1}{12} = 8.33\%$$

$$\frac{5}{8} = 62.5\%$$

$$\frac{1}{3} = 33.33\%$$

$$\frac{1}{13} = 7.69\%$$

$$\frac{7}{8} = 87.5\%$$

$$\frac{1}{4} = 25\%$$

$$\frac{1}{14} = 7.14\%$$

$$\frac{5}{6} = 83.33\%$$

$$\frac{1}{5} = 20\%$$

$$\frac{1}{17} = 5.88\%$$

$$\frac{11}{12} = 91.67\%$$

$$\frac{1}{6} = 16.66\%$$

$$\frac{1}{18} = 5.56\%$$

$$\frac{1}{7} = 14.28\%$$

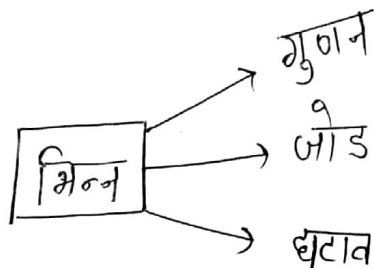
$$\frac{1}{19} = 5.26\%$$

$$\frac{1}{8} = 12.5\%$$

$$\frac{1}{20} = 5\%$$

$$\frac{1}{9} = 11.11\%$$

$$\frac{1}{10} = 10\%$$



गुणन के रूप में \Rightarrow

(a) $\frac{1}{7} = 14.28\%$
 $\left(\times \frac{1}{2} \right)$
 $\frac{1}{14} = 7.14\%$

(b) $\frac{1}{4} = 25\%$
 $\left(\times \frac{1}{2} \right)$
 $\frac{1}{8} = 12.5\%$
 $\left(\times \frac{1}{2} \right)$
 $\frac{1}{16} = 6.25\%$

(c) $\frac{1}{6} = 16.66\%$
 $\left(\times \frac{1}{2} \right)$
 $\frac{1}{12} = 8.32\%$

(d) $\frac{1}{11} = 9.09\%$
 $\left(\times 2 \right)$
 $\frac{2}{11} = 18.18\%$

जोड़ के रूप में \Rightarrow

(a) 107.69%
 $\rightarrow 100\% + 7.69\%$
 $= 1 + \frac{1}{13} = 1\frac{1}{13}$

(b) 116.66%
 $\rightarrow 100\% + 16.66\%$
 $= 1 + \frac{1}{6} = 1\frac{1}{6}$

(c) 137.5%
 $\rightarrow 100\% + 37.5\%$
 $= 1 + \frac{3}{8}$
 $= \frac{11}{8}$

(d) 162.5%
 $\rightarrow 100\% + 62.5\%$
 $= 1 + \frac{5}{8}$
 $= 1\frac{5}{8} = \frac{13}{8}$

धराव के रूप में \Rightarrow

(a) 90.91%.

$\rightarrow 100\% - 9.09\%$

$\rightarrow 1 - \frac{1}{11}$

$\rightarrow \frac{10}{11}$

(b) 87.5%.

$\rightarrow 100\% - 12.5\%$

$= 1 - \frac{1}{8}$

$= \frac{7}{8}$

(c) 92.86%.

$\rightarrow 100\% - 7.14\%$

$= 1 - \frac{1}{14} = \frac{13}{14}$

उदाहरण 1 \Rightarrow 35 का 28.56% + 32 का 87.5% = x

$= (2 \times \frac{1}{7}) \times 35 + (100\% - 12.5\%) \times 32 = x$

$= \frac{2}{7} \times 35 + (1 - \frac{1}{8}) \times 32$

$= 10 + 7 \times 4 = 10 + 28 = 38$

2. 64 का 37.5% + 24 का 16.66% = $\sqrt{729} + x$

$= 3(12.5\%) \times 64 + (\frac{1}{6}) \times 24 = 27 + x$

$= 3 \times \frac{1}{8} \times 64 + \frac{1}{6} \times 24 = 27 + x$

$= 24 + 4 = 27 + x$

$= x = 1$

(3) 2434 का 48%.

\swarrow
 \searrow
 50% - 2%

$$= 1217 - 48.68$$

$$= 1168.32$$

$$100\% = 2434$$

$$50\% = 1217$$

$$1\% = 24.34$$

$$2\% = 48.68$$

4) 2460 का 45%.

\swarrow
 \searrow
 50% - 5%

$$= 1230 - 123$$

$$= 1107$$

$$100\% \rightarrow 2460$$

$$50\% \rightarrow 1230$$

$$5\% \rightarrow 123$$

(5) 525 का 55%.

\swarrow
 \searrow
 50% + 5%

$$262.5 + 26.25$$

$$= 288.75$$

$$100\% \rightarrow 525$$

$$50\% \rightarrow 262.5$$

$$5\% \rightarrow 26.25$$

(6) 1248 का 26%.

\swarrow
 \searrow
 25% + 1%

$$= 312 + 12.48$$

$$= 324.48$$

$$100\% \rightarrow 1248$$

$$25\% \rightarrow \frac{1}{4} \times 1248 = 312$$

$$1\% \rightarrow 12.48$$

(7) 3369 का 67.66%.

$$66.66\% + 1\%$$

$$= 2246 + 33.69$$

$$= 2279.69$$

$$66.66\%$$

$$\hookrightarrow \frac{2}{3} \times 3369$$

$$= 2 \times 1123$$

$$= 2246$$

$$y \text{ का } x\% = x \text{ का } y\%$$

$$\frac{x}{100} \times y = \frac{y}{100} \times x \quad \text{दोनों का मान समान होता है।}$$

उदा. 1 50 का 56%.

$$\text{हल} \Rightarrow 50 \text{ का } 56\% = 56 \text{ का } 50\%$$

$$= 56 \times \frac{1}{2} = 28$$

उदा. 2 150 का 68%.

$$\Rightarrow 68 \text{ का } 150\%$$

$$\Rightarrow 100\% \rightarrow 68$$

$$50\% \rightarrow 34$$

$$150\% \rightarrow 102$$